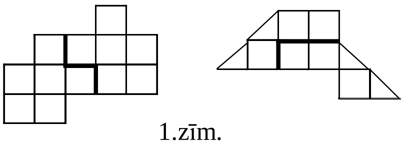
ĪSI ATRISINĀJUMI/ ATBILDES

5.1. Skat., piem., 1. zīm.



1.zīm.

4	1	7
8	5	2
3	9	6

2.zīm.

5.2. Skat., piem., 2.zīm.

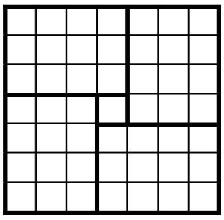
5.3. No uzrakstītajiem skaitļiem tieši 3 (12; 15; 18) dalās ar 3. Pastāv trīs iespējas:

a) nekādi divi no tiem nav blakus; meklējamo reizinājumu ir 6;

b) divi no tiem ir blakus, viens – „citur"; meklējamo reizinājumu ir 5;

c) visi tie ir pēc kārtas; meklējamo reizinājumu ir 4.

5.4. Skat. 3.zīm.; četros taisnstūros kopā ir ne vairāk kā 11 rūtiņas, un $4 \cdot 3 = 12 > 11$.



3.zīm.

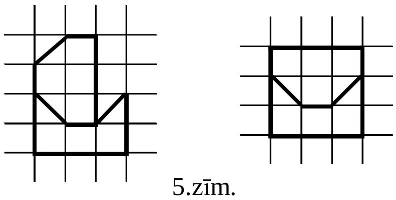
			x			
		x				x
	x				x	
x				x		
			x			
		x				x
	x				x	

4.zīm.

Otrajā gadījumā apgalvojums var nebūt spēkā; skat. 4.zīm.

5.5. Nē. Skaitļi 7 un 8, kas sākotnēji ir vienā rindā, nevar nonākt dažādās rindās.

6.1. Jā, skat., piem., 5.zīm.



5.zīm.

6.2. Ja skaitlī ir n ciparu „7", tad tā ciparu summa ir $7n$. Lai tā dalītos ar 9, skaitlim n jādalās ar 9. Tātad mūsu skaitlī ir deviņi septītnieki un viena nulle. Nulle var būt jebkurā pozīcijā, izņemot pirmo. Tātad pavisam ir 9 tādi skaitļi.

6.3. Nē, nevar. Ja to varētu izdarīt, tad 5 varētu būt blakus tikai ar 1 un ar 9, 4 – tikai ar 8 un 9, 6 – tikai ar 1 un 2. Tāpēc izvietojumam būtu jābūt tādam, kā redzams 6.zīm. Bet tad 3 jābūt blakus ar 2 – pretruna.

5	1	6
9		2
4	8	

6.zīm.

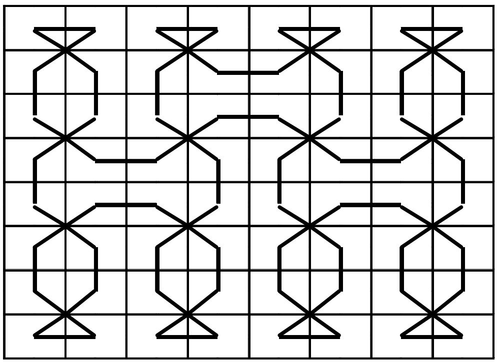
6.4. Nē. Ja tāds būtu, apskatām mazāko no tiem x. Ir divas iespējas:

a) x dalās ar 10. Tad, nosvītrojot 0 skaitļa x galā, iegūstam skaitli $\frac{x}{10}$ ar tādu pašu īpašību; pretruna, jo x nav mazākais;

b) x nedalās ar 10. Tad skaitlis $(x-111)$ ir ar tādu pašu īpašību – pretruna, jo x nav mazākais.

Iespējami daudzi citi atrisinājumi, analizējot dalīšanas procesu.

6.5. Skat., piem., 7.zīm.



7.zīm.

7.1. No 2 līdz 13 ieskaitot ir 6 pirmskaitļi, no 1 līdz 12 ieskaitot – 5 pirmskaitļi. Intervālā [*n*; *n* +11], $n > 2$, ik otrais skaitlis ir pāra skaitlis, kas nav 2, tātad nav pirmskaitlis. Tāpēc meklējamais maksimums ir 6.

7.2. Varam pieņemt, ka divas no apskatāmajām taisnēm sakrīt. Ja tās kopā satur 3 no punktiem *A*; *B*; *C*; *D*, tad ar tām sakrīt vēl trešā, ja tās kopā satur visus 4 punktus *A*; *B*; *C*; *D*, tad sakrīt visas 6 taisnes. Abos gadījumos iegūstam pretrunu ar doto.

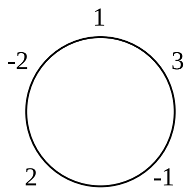
7.3. Apzīmējam uzrakstītos skaitļus pēc kārtas ar $x; y; z; t; v$. Tad skaitļi $a; b; c; d; e$ ir xy, yz, zt, tv, vx, un

$abcde = (xyztv)^2$.

a) $x; y; z; t; v$, sakārtoti pēc absolūtās vērtības, ir vismaz $\pm 1; \pm 2$ un (+3) vai (–3), tāpēc $(xyztv)^2 > 4$.

b) jā, var; skat. 8.zīm.

c) nevar, jo kvadrāts nav negatīvs.



8.zīm.

7.4. Ja starp apskatāmajiem skaitļiem ir divi tādi, kam pēdējie cipari vienādi, tad to starpība dalās ar 10. **Ja tādu nav,** tad sadalām skaitļus 5 grupās atbilstoši to pēdējiem cipariem:

1 vai 9
2 vai 8
3 vai 7
4 vai 6
5

Skaitļu ir 6, grupu – tikai piecas. Tātad divi skaitļi nonāk vienā grupā; to summa dalās ar 10.

7.5. Ja $a = b$, process var turpināties bezgalīgi. Pieņemsim, ka $a \neq b$. Ievērosim, ka $(2a - b) + (2b - a) = a + b$ un $(2a - b) - (2b - a) = 3(a - b)$. Tātad abu uzrakstīto skaitļu summa nemainās, bet to starpība (pēc absolūtās vērtības) katrā gājienā aug 3 reizes. Skaidrs, ka abi skaitļi nevar neierobežoti palikt pozitīvi.

8.1. Ja $a = c$, tad funkciju $ax + b$ un $cx + d$ grafiki ir paralēlas taisnes, un $y = ax + b$ vai $y = cx + d$ visiem *x*; tātad *y* ir lineāra funkcija. Ja $a \neq c$, minētie grafiki krustojas; tātad *y* grafiks ir lauzta līnija, un tātad *y* nav lineāra funkcija.

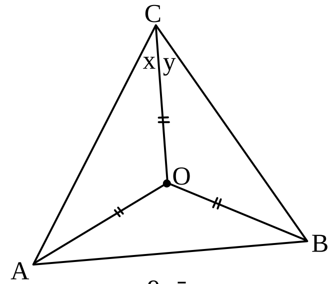
8.2. No visiem apgalvojumiem seko, ka *x* ir pāra skaitlis, tātad tā arī ir. No tā savukārt seko, ka x^3 dalās ar 2, ar 4 un ar 8. Tāpēc **vienīgais** aplamais apgalvojums var būt „ x^3 dalās ar 16”. Tā var gadīties, piem., ja $x = 2$.

8.3. $\angle AOC = 180° - 2x$;

$\angle BOC = 180° - 2y$.

Tāpēc

$\angle AOB = 360° - \angle AOC - \angle BOC = 2x + 2y = 2(x + y) = 2\angle ABC$, k.b.j.



9.zīm.

8.4. a) Salīdzinām divas monētas; vieglāko atliekam malā, bet palikušo salīdzinām ar nākošo, utt. Kad malā atliktas 2009 monētas (t.i. pēc 2009 svēršanām), vienīgā palikusī ir smagākā no visām.
Līdzīgi atrodam vieglāko monētu no visām.
b) Sadalām 2010 monētas 1005 pāros. Katra pāra monētas salīdzinām savā starpā. Pēc tam līdzīgi kā a) punktā ar 1004 svēršanām atrodam „smagāko no smagajām" un ar 1004 svēršanām – „vieglāko no vieglajām". Tās arī ir meklētās. Patērētas $1005 + 1004 + 1004 = 3013 < 4000$ svēršanas.
Piezīme: var pierādīt, ka ar mazāku svēršanu skaitu uzdevumā prasīto garantēti izdarīt nevar.

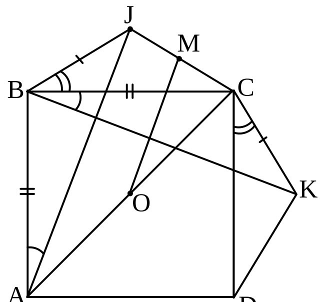
8.5. Pieņemsim pretējo. Tad $x(1-y) > \frac{1}{4}$, $y(1-z) > \frac{1}{4}$, $z(1-t) > \frac{1}{4}$, $t(1-x) > \frac{1}{4}$. Sareizinot šīs nevienādības, iegūstam $[x\,(1-x)][y\,(1-y)][z\,(1-z)][t\,(1-t)] > \left(\frac{1}{4}\right)^4$.

Bet $0 < x(1-x) = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - x\right)^2 \le \frac{1}{4}$ u.tml.; iegūstam pretrunu.

9.1. Nevienādību var identiski pārveidot par $(x - y + 1)^2 \ge 0$.

9.2. Acīmredzot $x + y = 32$; $x + z = 36$; $z + v = 48$; $t + v = 51$. Iegūstam $z - y = 4$; $t - z = 3$; no šīm abām sakarībām $t - y = 7$. Tāpēc $x + t = (x + y) + (t - y) = 39$. Tāpēc $37 = y + z$. Tātad $2x = (x + y) + (x + z) - (y + z) = 32 + 36 - 37 = 31$. No šejienes $x = 15\frac{1}{2}$; $y = 16\frac{1}{2}$; $z = 20\frac{1}{2}$; $v = 27\frac{1}{2}$; $t = 23\frac{1}{2}$. Pārbaude (**nepieciešama!**) parāda, ka uzdevuma nosacījumi ir apmierināti. Tāpēc vienīgās iespējamās vērtības ir atrastās.

9.3. Tā kā $AB = BC$, $BJ = CK$ un $\angle ABJ = 90° + \angle CBJ = 90° + \angle DCK = \angle BCK$, tad $\Delta ABJ = \Delta BCK$. Tāpēc $AJ \perp BK$. Bet $OM \parallel AJ$ kā viduslīnija trijstūrī ACJ. Tāpēc arī $OM \perp BK$.



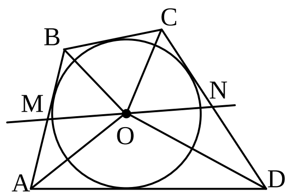
10.zīm.

9.4. Uzvar pirmais „p". Viņš ņem 3; otrajam „o" jāņem 4. Tagad jau skaidrs, ka „o" ar otro gājienu neuzvarēs. Tālāk „p" ņem 1; „o" jāņem 5. Tagad „p" ņem 6 un uzvar, jo 136 dalās ar 17.

9.5. No uzdevumā dotajām pēdējām 4 prasībām seko, ka $2x-5$ dalās ar 5; ar 7; ar 9; ar 11 (piemēram, $2x-5=2(x+1)-7$ dalās ar 7 u.tml.). Tā kā 5; 7; 9; 11 pa pāriem ir savstarpēji pirmskaitļi, tad $2x-5$ dalās ar $5\cdot 7\cdot 9\cdot 11=3465$. Tā kā $1\le x\le 2009$, tad $-3\le 2x-5\le 4013$. Šajās robežās ar 3465 dalās tikai 0 un 3465. Bet $2x-5=0$ naturālam x nav iespējams, tāpēc $2x-5=3465$ un ***x* = 1735**.

10.1. Ja naturālam skaitlim ir 2*n* dalītāji (tāds ir, piemēram, jebkurš skaitlis p^{2n-1}, p – pirmskaitlis) $d_1<d_2<...<d_{2n}$, tad $d_1\cdot d_{2n}=d_2\cdot d_{2n-1}=...=d_n\cdot d_{n+1}$. Tātad var izveidot *n* prasītā tipa grupas.

10.2. Pierādāmās nevienādības $\frac{1}{2}AM\cdot R+\frac{1}{2}AD\cdot R+\frac{1}{2}DN\cdot R=\frac{1}{2}MB\cdot R+\frac{1}{2}BC\cdot R+\frac{1}{2}CN\cdot R$ abas puses dala ar $\frac{1}{2}R$ (R – rādiuss).



11.zīm.

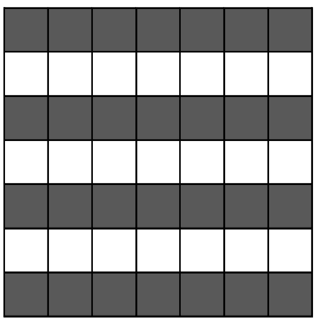
10.3. Nevienādību pārveido par $x(y-1)^2+y(x-1)^2\ge 0$.

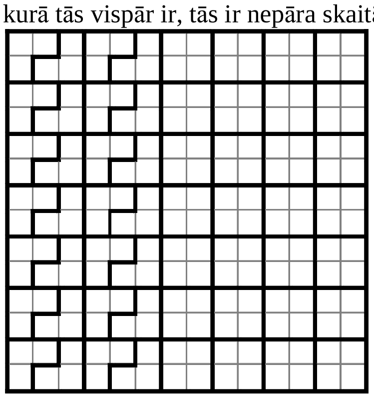
10.4. Salīdzinām divas monētas A un B. Pastāv divas iespējas.

1. A un B ir dažādas masas. Tad viena no tām ir viltota, otra – īsta. Sadalām atlikušās 98 monētas 49 pāros un katru no tiem salīdzinām ar pāri (A, B). Katrā svēršanā mēs noskaidrosim, cik viltoto monētu ir konkrētajā pārī. Pavisam tiks izmantotas 1 + 49 = 50 svēršanas.
2. A un B ir vienādas masas. Kā iepriekš salīdzinām pāri (A, B) ar citiem monētu pāriem, kamēr atrodam pāri (C, D), kura masa atšķiras no (A, B) masas. Pieņemsim, ka (C, D) kopējā masa ir mazāka nekā (A, B) kopējā masa (otrs gadījums ir „simetrisks”). Tad A un B, kā arī visas citas līdz šim svērtās monētas ir īstas. Salīdzinām C un D. Rezultātā mēs atrodam vismaz vienu monētu no pāra (C, D), kura ir viltota. Tagad izveidojam pāri (īsta monēta, viltota monēta) un turpinām kā 1. gadījumā. Pavisam tiks izmantotas 1 + 49 + 1 = 51 svēršanas.

10.5. Ja katra veida figūru ir *k*, tad kopējais rūtiņu skaits tajās ir 4*k* + 3*k* = 7*k*; tātad $n^2 = 7k$ un *n* jādalās ar 7. Mazākās iespējamās *n* vērtības ir *n* = 7 un *n* = 14.

A. Pie *n* = 7 uzdevuma prasības nav izpildāmas. Pieņemsim, ka tas izdevies, un izkrāsosim rūtiņas, kā parādīts 12. zīm. Katrs no 7 kvadrātiem satur 2 melnas rūtiņas, tāpēc 7 „stūrīši” kopā satur $28-14=14$ melnas rūtiņas. Tāpēc katrs „stūrītis” satur tieši 2 melnas un 1 baltu rūtiņu (jo katrs stūrītis noteikti satur ne vairāk kā 2 melnas rūtiņas). Bet melnās rūtiņas nevar sadalīties pa pāriem, kas ietilpst kvadrātos un stūrīšos, jo katrā rindiņā, kurā tās vispār ir, tās ir nepāra skaitā.


12. zīm.

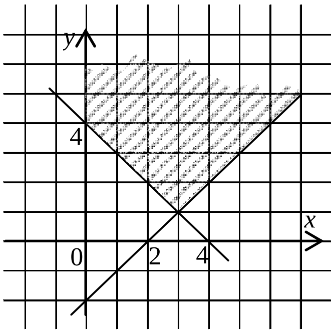

13. zīm.

B. Risinājumu pie *n* = 14 skat. 13. zīm.

11.1. No vienādības $x(x+15)=2^y$ seko, ka katrs no skaitļiem x un $x+15$ vai nu vieninieks, vai divnieka pakāpe ar naturālu kāpinātāju. Virknē 1; 2; 4; 8; 16; 32; ... vienīgie skaitļi, kuru starpība ir 15, ir 1 un 16 (nepieciešams pamatojums!).

Tāpēc $x=1$ un $y=4$.

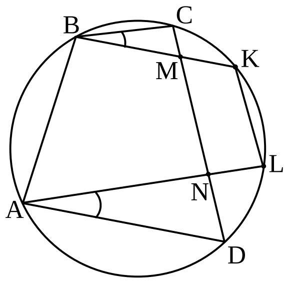
11.2. Uzzīmējam attiecīgo $(x;y)$ punktu apgabalu koordinātu plaknē (14.zīm.).



14.zīm.

Atceroties taisnes $y=k\cdot x$ virziena koeficienta ģeometrisko jēgu, redzam, ka $\frac{y}{x}\geq\frac{1}{3}$ un vērtība $\frac{1}{3}$ tiek sasniegta tad un tikai tad, ja $x=3$ un $y=1$.

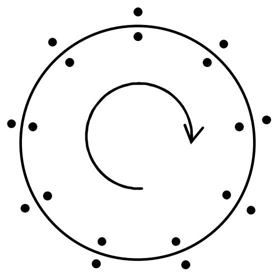
11.3. Skaidrs, ka $\angle CBM=\angle NAD$ (leņķi ar savstarpēji paralēlām un vienādi vērstām malām). Tāpēc loki CK un LD ir vienādi. Tāpēc $KL \parallel CD$. Prasītais seko no vienādībām $\angle BAN+\angle BMN=\angle BAN+\angle BKL=180°$



15.zīm.

11.4. a) Pieņemsim, ka tāda pāra nav. Lūgsim katram zēnam uzrakstīt y dažādas kartītes – katru ar savu vārdu un kādu tās meitenes vārdu, kas viņam patīk. Līdzīgu darbu lūgsim izdarīt meitenēm. Tā kā savstarpēju simpātiju nav, tad nav divu kartīšu, uz kurām būtu vienādi uzraksti; tāpēc kartīšu nav vairāk par $n\cdot n=n^2$. No otras puses, kartīšu ir $x\cdot n+y\cdot n=(x+y)\cdot n>n\cdot n=n^2$ – pretruna.

b) Attēlosim meitenes ar punktiem riņķa līnijas iekšpusē, bet zēnus – ar punktiem riņķa līnijas ārpusē (skat. 16.zīm., kur n = 9).



16.zīm.

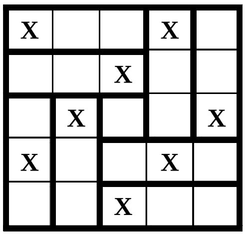
Ja katrai meitenei patīk x zēni pulksteņa rādītāja kustības virzienā, sākot ar to, kurš stāv viņai blakus, bet katram zēnam – y meitenes pulksteņa rādītāja kustības virzienā, sākot ar to, kura stāv viņam vienu pozīciju priekšā, tad savstarpēju simpātiju nav.

11.5. Ja četrstūra pēc kārtas ņemtas malas ir a; b; c; d, tad

$$L=\frac{1}{2}ab\sin\alpha+\frac{1}{2}cd\sin\beta\le\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}cd\le\frac{a^2+b^2}{4}+\frac{c^2+d^2}{4}=\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}.$$

Saskaitot šīs nevienādības visiem sadalījumā izveidotajiem četrstūriem, iegūstam vajadzīgo.

12.1. To, ka pietiek ar 8, bet ne mazāk rūtiņām, skat 17.zīm.



17.zīm.

12.2. Pārveidojam vienādojumu par

$$(1+x)(1+y)=2011$$

Tā kā 2011 ir pirmskaitlis, tad 1 + x var būt tikai viens no skaitļiem 1; -1; 2011; -2011. Iegūstam $(x;y)=(0;2010)$, $(-2;-2012)$, $(2010;0)$, $(-2012;-2)$.

12.3. No teorēmas par sekanšu nogriežņu reizinājumiem iegūstam

$$AM\cdot(a-BN)=AT\cdot(a-CS)$$
$$BK\cdot(a-CL)=BN\cdot(a-AM)$$
$$CS\cdot(a-AT)=CL\cdot(a-BK),$$

kur a – ΔABC malas garums.

Saskaitot šīs vienādības, pēc identiskiem pārveidojumiem iegūstam vajadzīgo.

12.4. Atceramies Koši – Bunjakovska nevienādību: katriem diviem „vektoriem" $(x_1;x_2;x_3)$ un $(y_1;y_2;y_3)$ ir spēkā $(x_1^2+x_2^2+x_3^2)(y_1^2+y_2^2+y_3^2)\ge(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)^2$.

Pielietosim to „vektoriem" $(\sqrt{a};\sqrt{b};\sqrt{c})$ un $\left(\sqrt{\frac{a-1}{a}};\sqrt{\frac{b-1}{b}};\sqrt{\frac{c-1}{c}}\right)$.

Iegūstam $(a+b+c)\left(\frac{a-1}{a}+\frac{b-1}{b}+\frac{c-1}{c}\right)\ge\left(\sqrt{a-1}+\sqrt{b-1}+\sqrt{c-1}\right)^2$.

Tā kā $\frac{a-1}{a}+\frac{b-1}{b}+\frac{c-1}{c}=3-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=1$, seko vajadzīgais.

12.5. Aprēķinām $x=(a+b)(c+d)$, $y=ac$, $z=bd$. Tad $ad+bc=x-y-z$ un $ac-bd=y-z$.
