LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola

2009./2010.m.g. sagatavošanās olimpiāde matemātikā

Katra metodiskā apvienība pati nolemj, vai un kad tā rīkos vai nerīkos šādu olimpiādi un, ja rīkos, tad cik un kurus no piedāvātajiem uzdevumiem izmantos. Uzdevumus var arī daļēji mainīt, pārcelt no vienas klašu grupas uz citu, izmantot skolas olimpiādēs, pulciņu darbā utt. **Rekomendējamais olimpiādes datums ir 27. novembris. Rīkot olimpiādi vai izmantot šeit piedāvātos uzdevumus citā veidā darbā ar skolēniem agrāk par šo datumu nedrīkst.**

Atsauksmes un ierosinājumus lūdzam sūtīt

- pa parasto pastu uz adresi:

A.Liepas NMS. SO
Fizikas un matemātikas fakultāte
Latvijas Universitāte
Rīgā, Zeļļu ielā 8
LV-1002

- vai pa elektronisko pastu uz adresi:

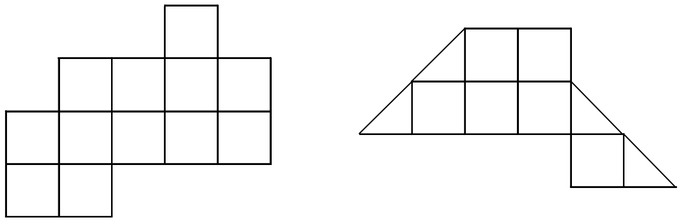
nms@lu.lv

Veiksmi Jums un Jūsu skolēniem!

LU NMS

5. klase

1. Sagriezt katru no 1.zīm. attēlotajām figūrām divās daļās, kas ir vienādas gan pēc formas, gan pēc izmēriem. Griezumiem nav noteikti jāiet pa rūtiņu līnijām. Pietiek parādīt vienu veidu katrai figūrai.



1.zīm.

2. Kvadrāts sastāv no 3×3 rūtiņām. Vai var katrā rūtiņā ierakstīt veselu skaitli no 1 līdz 9 (tiem visiem jābūt dažādiem) tā, lai katrās divās rūtiņās ar kopīgu malu ierakstīto skaitļu starpība būtu vismaz 3?

3. Pa apli izrakstīti naturāli skaitļi no 11 līdz 20, katrs tieši vienu reizi. Katriem diviem blakus uzrakstītiem skaitļiem aprēķināja to reizinājumu. Cik no šiem reizinājumiem var dalīties ar 3?

4. Kvadrāts sastāv no 7×7 rūtiņām. No tām 11 rūtiņas nokrāsotas. Pierādīt: kvadrātā var atrast tādu taisnstūri, kas sastāv no 3×4 rūtiņām un kurā nokrāsotas ne vairāk kā 2 rūtiņas. Vai uzdevuma apgalvojums paliek spēkā, ja kvadrātā nokrāsotas 12 rūtiņas?

5. Tabulā ierakstīti skaitļi, kā parādīts 2.zīm. ar vienu gājienu var mainīt vietām vai nu divas rūtiņas vai divas kolonnas. Vai, vairākkārt izpildot šādus gājienus, var iegūt tādu tabulu, kāda redzama 3.zīm.?

3	4	1	2
7	8	5	6
9	10	11	12

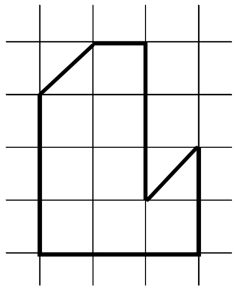
2.zīm.

6	7	10	5
12	9	8	11
4	1	2	3

3.zīm.

6. klase

1. Vai 4.zīm. parādīto figūru var sagriezt divās daļās, no kurām var salikt kvadrātu? Griezumiem nav noteikti jāiet pa rūtiņu līnijām. Daļas saliekot nedrīkst pārklāties.



4.zīm.

2. Cik ir tādu desmitciparu naturālu skaitļu, kas dalās ar 9 un kuru pierakstā nav citu ciparu kā vien varbūt 0 un 7?

3. Vai var kvadrātā, kas sastāv no 3×3 rūtiņām, katrā rūtiņā ierakstīt veselu skaitli no 1 līdz 9 (tiem visiem jābūt dažādiem) tā, lai katrās divās rūtiņās ar kopīgu malu ierakstīto skaitļu starpība būtu vismaz 4?

4. Vai kāds naturāls skaitlis, kuram katrs nākošais cipars (izņemot pirmo) ir mazāks par iepriekšējo, dalās ar 111?

5. Kvadrāts sastāv no 8×8 rūtiņām. Sprīdītis sāk ceļu vienā no tām. Viņam atļauti divu veidu gājieni: „taisni” (no rūtiņas uz citu rūtiņu, kurai ar pašreizējo ir kopīga mala) un „slīpi” (no rūtiņas uz citu rūtiņu, kurai ar pašreizējo ir kopīgs stūris, bet ne kopīga mala). „Taisnos” un „slīpos” gājienus jāizdara pamīšus; ar 64-o gājienu Sprīdītim jāatgriežas sākotnējā rūtiņā un jābūt apmeklējušam visas rūtiņas. Vai Sprīdītis to var izdarīt?

7. klase

1. Kāds lielākais daudzums pirmskaitļu var būt starp 12 pēc kārtas ņemtiem naturāliem skaitļiem?

2. Doti 4 punkti *A*, *B*, *C*, *D*. No taisnēm *AB*, *AC*, *AD*, *BC*, *BD*, *CD* vismaz piecas ir dažādas. Pierādīt, ka visas sešas taisnes ir dažādas.

3. Pa riņķa līniju izrakstīti 5 dažādi veseli skaitļi. Katri divi blakus uzrakstīti skaitlī sareizināti; apzīmēsim iegūtos reizinājumus ar a; b; c; d; e.

Vai reizinājums $abcde$ var būt **a)** 4, **b)** 144, **c)** -2009 **?**

4. Pierādīt: starp jebkuriem 6 naturāliem skaitļiem, kas nedalās ar 10, var atrast divus tādus, kuru summa vai starpība dalās ar 10.

5. Uz tāfeles uzrakstīti divi naturāli skaitļi a un b. Ar vienu gājienu var aprēķināt skaitļus $2a-b$ un $2b-a$ un, ja tie abi ir naturāli, nodzēst abus sākotnējos skaitļus un to vietā uzrakstīt iegūtos. Ja kāds no iegūtajiem skaitļiem ir 0 vai negatīvs, process beidzas.

Kādām a un b vērtībām process var turpināties bezgalīgi?

8. klase

1. Ar $\max(s;t)$ saprotam lielāko no skaitļiem *s* un *t*. Piemēram, $\max(3;5)=5$; $\max(4;4)=4$.

Dots, ka *a*, *b*, *c*, *d* – konstantes un funkcija $y=\max(ax+b;cx+d)$ ir lineāra funkcija (ar argumentu *x*). Pierādīt, ka $a=c$.

2. Ir zināms, ka no apgalvojumiem „x^3 dalās ar 2”; „x^3 dalās ar 4”, „x^3 dalās ar 8”, „x^3 dalās ar 16” vismaz viens ir patiess un vismaz viens ir aplams (*x* ir naturāls skaitlis). Kuri apgalvojumi ir patiesi, kuri – aplami?

3. Trijstūra *ABC* iekšpusē atrodas tāds punkts *O*, ka $AO=BO=CO$. Pierādīt, ka $\angle AOB=2\cdot\angle ACB$.

4. Dotas 2010 pēc ārējā izskata vienādas monētas; to masas visas ir atšķirīgas. Doti arī sviras svari bez atsvariem. Uz katra kausa uzliekot pa vienai monētai, smagākā no tām nosveras uz leju.

a) Pierādīt, ka gan smagāko monētu vienu pašu, gan vieglāko monētu vienu pašu var atrast, izdarot 2009 svēršanas.

b) Vai **abas** šīs monētas – gan smagāko, gan vieglāko – var atrast, izdarot mazāk nekā 4000 svēršanas?

5. Dots, ka $0<x<1$, $0<y<1$, $0<z<1$, $0<t<1$. Pierādīt, ka vismaz viens no skaitļiem $x(1-y)$, $y(1-z)$, $z(1-t)$, $t(1-x)$ nepārsniedz $\frac{1}{4}$.

9. klase

1. Dots, ka x un y – reāli skaitļi. Pierādīt, ka

$$x^2 + y^2 + 1 \geq 2(xy - x + y).$$

2. Dots, ka $x < y < z < t < v$. Andris aprēķināja šo piecu skaitļu summas pa diviem. Trīs mazākās summas iznāca 32; 36; 37, bet divas lielākās iznāca 48 un 51.

Kādas ir iespējamās x; y; z; t; v vērtības?

3. Kvadrāta $ABCD$ centrs ir O. Ārpus kvadrāta konstruēti divi vienādi vienādsānu trijstūri BCJ un CDK ($BJ = CJ$ un $CK = DK$). Ar M apzīmējam CJ viduspunktu.

Pierādīt, ka $OM \perp BK$.

4. Uz galda atrodas 7 kartītes; uz tām uzrakstīti cipari 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6 (uz katras kartītes cits cipars). Divi spēlētāji pēc kārtas ņem pa vienai kartītei. Tas, kurš pirmais var no savām kartītēm izveidot veselu pozitīvu skaitli, kas dalās ar 17, uzvar. Kurš uzvar pareizi spēlējot – tas, kas izdara pirmo, vai tas, kas izdara otro gājienu, vai arī spēle beidzas neizšķirti?

5. Kuri naturālie skaitļi x apmierina vienlaicīgi visas sekojošās prasības:

- $x \leq 2009$,
- x dalās ar 5,
- $x + 1$ dalās ar 7,
- $x + 2$ dalās ar 9,
- $x + 3$ dalās ar 11?

10. klase

1. Vai eksistē naturāls skaitlis n, kura visus naturālos dalītājus (ieskaitot 1 un n) var sadalīt 4 grupās tā, lai dalītāju reizinājumi visās grupās būtu vienādi savā starpā? Bet ja dalītājus būtu jādala 13 grupās?

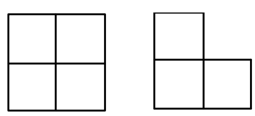
2. Četrstūrī $ABCD$ var ievilkt riņķa līniju ar centru O. Taisne t, kas iet caur O, dala $ABCD$ perimetru uz pusēm. Pierādīt, ka tā dala uz pusēm arī $ABCD$ laukumu.

3. Dots, ka x un y – pozitīvi skaitļi. Pierādīt, ka

$$xy^2 + x + y + x^2 y \geq 4xy .$$

4. Ir 100 pēc ārējā izskata vienādas monētas. Dažas (vismaz viena) ir īstas un dažas (vismaz viena) ir viltotas. Visām īstajām monētām ir vienādas masas; arī visām viltotajām monētām ir vienādas masas. Viltotās monētas ir vieglākas par īstajām. Kā, izmantojot sviras svarus bez atsvariem, ar 51 svēršanām noskaidrot, cik ir viltoto monētu?

5. Kvadrāts sastāv no $n \times n$ vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Ir zināms, ka to var sagriezt tādos gabalos, kādi parādīti 5.zīm., pie tam abu veidu gabali ir vienādā skaitā. Atrast mazāko iespējamo n vērtību.



5. zīm.

11. klase

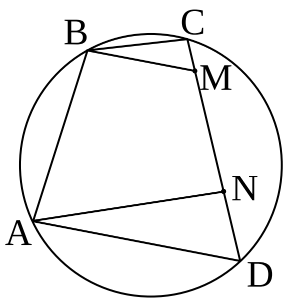
1. Atrisināt naturālos skaitļos vienādojumu

$$x^2 + 15x = 2^y$$

2. Dots, ka x un y – pozitīvi skaitļi un pastāv sakarības $x + y \geq 4$ un $y - x \geq -2$.

Atrast izteiksmes $\frac{y}{x}$ mazāko iespējamo vērtību.

3. Četrstūris $ABCD$ ievilkts riņķa līnijā; $BM \parallel AD$ un $AN \parallel BC$. Pierādīt, ka punkti A; B; M; N atrodas uz vienas riņķa līnijas (skat. 6.zīm.).



6.zīm.

4. Kādā klasē ir n zēni un n meitenes. Katrai meitenei patīk x zēni. Katram zēnam patīk y meitenes. Pierādīt, ka:

a) ja $x + y > n$, tad noteikti var atrast tādu zēnu un tādu meiteni, kas patīk viens otram,

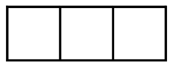
b) ja $x + y \leq n$, tad var gadīties, ka šādu zēnu un meiteni atrast neizdodas.

5. Kvadrāts ar izmēriem 1×1 sadalīts dažos izliektos četrstūros. Pierādīt, ka visu četrstūru visu malu kvadrātu summa nav mazāka par 4.

2009./2010.m.g. sagatavošanās olimpiāde matemātikā

12. klase

1. Kādu mazāko daudzumu rūtiņu jāatzīmē kvadrātā, kas sastāv no 5×5 rūtiņām, lai katra 7.zīm. attēlotā figūra (tās var būt novietotas arī citādi) saturētu vismaz vienu atzīmētu rūtiņu?



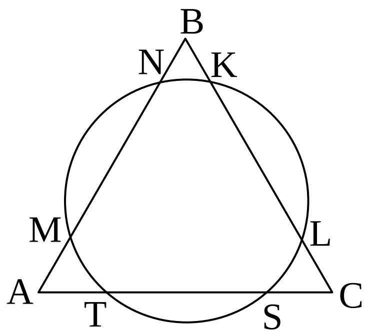
7. zīm.

2. Atrisināt veselos skaitļos vienādojumu

$$x + y + xy = 2010$$

3. Dots, ka ΔABC ir regulārs; riņķa līnija krusto tā malas, kā parādīts 8.zīm. Pierādīt, ka

$$AM + BK + CS = AT + CL + BN\ .$$



8.zīm.

4. Dots, ka $a, b, c > 1$ un $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 2$.

Pierādīt, ka $\sqrt{a+b+c} \geq \sqrt{a-1} + \sqrt{b-1} + \sqrt{c-1}$.

5. Izstrādāt paņēmienu, kā no patvaļīgiem reāliem skaitļiem a, b, c, d iegūt izteiksmju $ac - bd$ un $ad + bc$ skaitliskās vērtības, izmantojot tikai trīs reizināšanas operācijas. Saskaitīšanu un atņemšanu daudzums var būt patvaļīgs; dalīšana nav pieļauta.