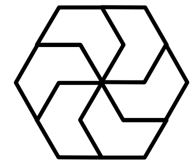
ĪSI ATRISINĀJUMI/ ATBILDES

5.1. Atbilde: C=0,D=4,E=3,I=9,N=5,P=8,S=1,V=7.
Vispirms no trešās un piektās kolonnas var izsecināt, ka I=9 un S=1, tālāk no otrās kolonnas secina, ka D=4. Trešajā kolonnā N+V+V+1 = 20 + C tātad V≥6. Pirmajā kolonnā P=V+1, pie tam P≤8, tātad V≤7. Pārbaudot redzam, ka der tikai V=7, tad P=8, N=5+C. Vienīgie neizmantotie cipari,. kuru starpība ir 5, ir 0(=C) un 5(=N). No atlikušajiem vienīgais nepāra cipars ir 3, tātad E=3.
Piezīme. Ja uzdevums ir „Atrisiniet...", tas nozīmē, ka jāatrod ***visi*** *atrisinājumi un jāpamato, ka citu nav. šajā gadījumā atrisinājums ir viens vienīgs, kas seko no risinājuma.*

5.2. a) 18, 36, 54, 72, 90; **b)** 9, 18, 27, 36, 45.

5.3. Skat., piem., 1. zīm.

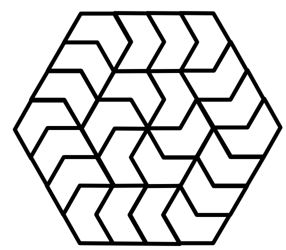

1. zīm.

5.4. Atbilde: 18 *l*.
Ievērojam, ka otrajā spainī ielietajam ūdens daudzumam jādalās ar 2, bet trešajā spainī – ar 3. Tā kā visos spaiņos tika ieliets vienāds daudzums ūdens, tad tam jādalās ar 6, tātad mazākais vienā spainī ielietais daudzums ir 6 *l*, bet mazākais mucas tilpums var būt 18 *l*. Pārbaude parāda, ka 18 *l* var būt: tad pirmā spaiņa tilpums ir 12 *l*, otrā spaiņa tilpums ir 9 *l*, bet trešā spaiņa tilpums ir 8 *l*.

5.5. Labās kabatas saturu ne vienmēr var sadalīt divās vienādi vērtīgās kaudzītēs: var gadīties, ka ir viena 50 sant. monēta un 48 viensantīma monētas.
Kreisās kabatas saturu vienmēr var sadalīt tādās kaudzītēs. Apskatīsim riņķa līniju, kas sadalīta 98 vienādās daļās; sauksim tās par vienībām. Uzskatīsim, ka viena šāda vienība atbilst 1 santīmam. Tad dažus dalījuma punktus nokrāsosim sarkanus tā, lai **katrs loks** starp diviem blakus esošiem sarkaniem punktiem **atbilst tieši vienai monētai** Jāņa kreisajā kabatā (t.i., ja Jānim ir viensantīma monēta, jābūt nokrāsotiem diviem blakusesošiem dalījuma punktiem, ja ir piecsantīma monēta, tad jābūt diviem blakusesošiem sarkaniem punktiem, starp kuriem ir 5 vienības utml.). Tā kā pavisam ir 50 monētas, tad ir nokrāsoti tieši 50 punkti. Tā kā pavisam ir 98 dalījuma punkti, tad noteikti var atrast divus tādus sarkanus punktus, kas ir viena diametra galapunkti. Tad vajadzīgās kaudzītes iegūstam, vienā ņemot monētas, kas atbilst pusriņķim uz vienu pusi no šī diametra, bet otrā – kas atbilst otram pusriņķim.

6.1. Atbilde: piemēram, 5829134670 (pavisam šādu skaitļu ir 5454).
Lai skaitlis dalītos ar 2010, tam jādalās ar 10 un 201=3·67, tātad pēdējam ciparam jābūt 0. Tā kā visu desmit ciparu summa ir 45 – dalās ar 3, tad un jebkurš no šiem cipariem sastāvošais skaitlis dalās ar 3. Tātad atliek atrast skaitli, kas dalās ar 67. Šo skaitli var meklēt kā sastāvošu no atsevišķiem blokiem, kur katra bloka skaitlis dalās ar 67.

6.2. Skat., piem., 2. zīm.


2. zīm.

6.3. Atbilde: 25 santīmus.
Pieņemsim, ka viena pildspalva maksā x santīmus. Tad 16 pildspalvas maksā $16x$ santīmus jeb $100:x$ latus, tātad $100\cdot(100:x)=10000:x$ santīmus. Tā kā $x=(10000:16):x=625:x$, tad $x=25$.

6.4. Virknes sākums ir 11, 4, 7, 13, 16, 13, 16, ... Skaidrs, ka sākot ar ceturto locekli, virkne ir periodiska: pāra vietās visi locekļi ir 13, bet nepāra – 16. Tātad 2010. vietā šajā virknē ir skaitlis 13.

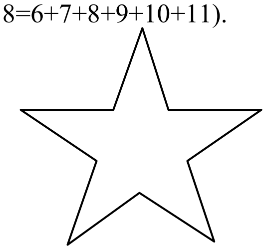
6.5.Atbilde: divas bumbiņas.
Vispirms ievērosim, ka uz labā svaru kausa katra bumbiņa ir smagāka nekā tās pašas krāsas bumbiņa uz kreisā svaru kausa, pretējā gadījumā, samainot tās vietām, svaru stāvoklis nemainītos. Ja uz katra svaru kausa būtu uzliktas trīs vai vairāk bumbiņas, tad samainot vietām divas vienas krāsas bumbiņas, kurām masas starpība ir vismazākā, atkal nekas nemainīsies. Tātad katra kausa var būt ne vairāk kā divas bumbiņas. Ja uz kausiem ir pa 2 bumbiņām, tad vienas krāsas bumbiņu masu starpībām jābūt vienādām.

7.1. Apzīmēsim meklējamos divciparu skaitļus ar $\overline{ab}=10a+b$. Tad $(a+b)+ab=10a+b$, no kurienes iegūstam $a(b-9)=0$. Tā kā $a\neq0$, tad b=9. Tātad minētā īpašība piemīt visiem divciparu skaitļiem, kuru vienu cipars ir 9, t.i., 19, 29, 39, 49, 59, 69, 79, 89, 99.

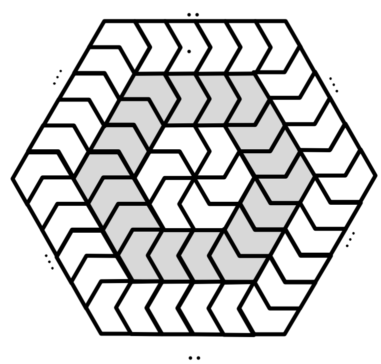
7.2. Skat., piem., 3. zīm.

7.3. Atbilde: trīs dažādos veidos.

Visi dažādie sadalījumi atšķirsies ar saskaitāmo skaitu, tāpēc jānoskaidro, cik pēc kārtas sekojoši naturāli skaitļi summā var dot 51. Tā kā 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10=55>51, tad vairāk kā 9 saskaitāmie būt nevar.
Apskatīsim *k* pēc kārtas sekojošu naturālu skaitļu summu, ar *n* apzīmēsim mazāko no tiem. Tad $n+(n+1)+(n+2)+...+(n+k-1)=n\cdot k+\dfrac{k(k-1)}{2}$ un $2n\cdot k+k(k-1)=k(2n+k-1)=102$. Tātad 102 jādalās ar *k*. Skaitlis 102 dalās ar 1, 2, 3, 6, 17, 34, 51, 102. Tā kā $2\le k\le 9$, tad *k* var būt tikai 2, 3, 6 (51=25+26=16+17+18=6+7+8+9+10+11).



3. zīm.



4. zīm.

7.4. Griešanu sāksim no sešstūra centra kā parādīts 4. zīm.; katrā nākamajā joslā vienā rindā ir par 2 figūriņām vairāk nekā iepriekšējā slānī.

7.5. Aplūkosim viena pāra skaitļu starpības iespējamo izmaiņu pēc kalkulatora vienas operācijas izpildes: ja pirms operācijas izpildes starpība ir (*b*-*a*), tad pēc operācijas (*b*-*a*)-3. Tātad pēc vairāku operāciju izpildes skaitļu starpība no sākotnējās var atšķirties tikai par skaitļa 3 daudzkārtni. Bet 30-1=29 dod atlikumu 2, dalot ar 3, savukārt 17-13=4 dod atlikumu 1, dalot ar 3. Tātad no (1;30) iegūt (13;17) nav iespējams.

8.1. Acīmredzami, ka $\dfrac{a}{a+1}>\dfrac{a}{a+b+1}$ (skaitītāji vienādi, otrajai daļai saucējs lielāks) un arī $\dfrac{b}{b+1}>\dfrac{b}{a+b+1}$.
Saskaitot abas šīs nevienādības, iegūstam prasīto.

8.2. ΔADF=ΔFEC (*mmm*), jo AD=FE, DF=EC un AF=FC. DG un EH ir atbilstošie augstumi šajos trijstūros, tātad punkti G un H ir atbilstošie augstumu pamati, tātad GF un HC ir atbilstošie nogriežņi, tāpēc ir vienādi.

8.3. Atbilde: var sagriezt tad un tikai tad, ja *n* ir pāra skaitlis.
Regulārs sešstūris ar malas garumu *n* sastāv no $6n^2$ vienādmalu trijstūrīšiem ar malas garumu 1. Ja *n* ir nepāra skaitlis, tad $6n^2$ nedalās ar 4, tāpēc regulāru sešstūri, kura malas garums ir nepāra skaitlis, nevar sagriezt dotā veida figūriņās.
Regulāru sešstūri, kura malas garums ir pāra skaitlis, vienmēr var sagriezt dotā veida figūriņās, skat. 7.4. uzdevuma risinājumu.

8.4. Atbilde: a) 6; **b)** 4.
Uzrakstīsim visus divciparu skaitļus, kas dalās ar 17 vai 23. Tie ir 17, 23, 34, 46, 51, 68, 69, 85, 92.
Ja pirmais ir 9, tad nākamie cipari noteikti ir 92346... Pēc sešinieka var nākt vai nu 8 vai 9.
Ja 8, tad nākamie cipari ir ...8517 un virkni turpināt vairs nevar. Tātad, ja aiz 6 ir vismaz 5 cipari, tad tie var būt tikai ...692346... Redzam, ka virkne ir periodiska ar periodu 5, tātad 2010. cipars tāpat kā 5. ir 6.
Ja pēdējais cipars ir 1, tad iepriekšējie cipari nosakās vienā vienīgā veidā un tie ir ...692346851. Redzams, ka (92346) būs periods, tātad pirmais skaitlis būs tāds pats, kā 2006., tas ir 4.

8.5. Atbilde: N=5.
Lampiņas ar numuriem 2, 3 un 6 nevar vienlaicīgi būt ieslēgtas, jo lampiņa ar numuru 2, būs ieslēgta tikai tad, ja slēdzis ar numuru 2 būs slēgts nepāra skaitu reižu, tāpat arī lampiņa 3 būs ieslēgta tikai tad, ja slēdzis ar numuru būs slēgts nepāra skaitu reižu. Ja lampiņas Nr. 2 un 3 ir ieslēgtas, tad slēdži ar numuriem 2 un 3 kopā ir slēgti pāra skaitu reižu. Katra no šīm pārslēgšanām ietekmē arī lampiņu 6, tāpēc tā būs izslēgta.
Lai ieslēgtu visas lampiņas no 2 līdz 5, pa vienai reizei jāieslēdz slēdži 2, 3 un 5.

9.1. Pārveidojam pierādāmo nevienādību:
$$x^4+y^4-x^3y-xy^3\ge 0 \Rightarrow (x-y)\left(x^3-y^3\right)\ge 0\,.$$

Pēdējā nevienādība ir patiesa, jo, ja $x>y$, tad $x^3>y^3$ ($y=x^3$ – augoša funkcija) un abas iekavas ir pozitīvas, bet, ja $x<y$, tad $x^3<y^3$ un abas iekavas ir negatīvas.

9.2. Atzīmēsim, ka norādītās mediāna un bisektrise nevar iziet no vienas virsotnes, jo tad šīs virsotnes leņķim būtu jābūt lielākam par 180°.
Pieņemsim, ka trijstūrī ABC apskatāmā bisektrise ir AD, bet mediāna CE; tās krustojas punktā F. Tad AF ir bisektrise un augstums trijstūrim ACE; tātad šis trijstūris ir vienādsānu ar sānu malām AC=AE. Tā kā CE ir mediāna, tad AB=2AE=2AC.

9.3. Dalot skaitli A ar 7, ievērojam, ka tas dalās ar 7 tikai, ja vieninieku skaits dalās ar 6. Šāds skaitlis dalās arī ar 13.

9.4. Izliektā 39-stūra visus leņķus aizpilda deviņu izliekto sešstūru leņķi. Tātad 39-stūra leņķu summai ir jābūt ne lielākai par 9 sešstūru leņķu summu. Taču 39-stūra leņķu summa ir $37\cdot180°$, bet deviņu sešstūru leņķu summa ir $9\cdot4\cdot180°=36\cdot180°<37\cdot180°$.

9.5. Otrais spēlētājs vienmēr var panākt savu uzvaru. Sadalīsim rūtiņas pāros kā parādīts 5. zīmējumā (viena pāra rūtiņas apzīmētas ar vienu burtu). Otrais spēlētājs katrā gājienā iekrāso rūtiņu, kurā ierakstīts tas pats burts, kāds bija rūtiņā, kuru pirms tam iekrāsoja pirmais spēlētājs. Ja pēc pirmā spēlētāja gājiena nebija izveidojies iekrāsots 2×2 rūtiņu kvadrāts, tad arī pēc otrā spēlētāja gājiena tas neizveidosies.

A	B	C	D
E	F	G	H
A	B	C	D
E	F	G	H

5. zīm.

10.1. Aplūkojam kvadrātfunkciju $f(x)=cx^2+bx+a$. No dotā seko, ka $f(0)\cdot f(1)<0$. Tātad šim polinomam eksistē divas saknes, un tā diskriminants b^2-4ac ir pozitīvs.

10.2. Jā, der piemēram skaitļi $\frac{1}{2010!},\frac{2}{2010!},\frac{3}{2010!},...,\frac{2010}{2010!}$. Tiem visiem saucējs dalās ar skaitītāju, tātad ar skaitītāju var saīsināt un iegūt daļu, kuras skaitītājā ir 1. Acīmredzami spēkā arī otrs nosacījums: $a_{i+1}-a_i=\frac{1}{2010!}$ visiem i.

10.3. No vienādības $38=p(2p^9-qrs)$ seko, ka 38 dalās ar p. Tātad pastāv divas iespējas:

1) $n=2\cdot2^{10}-38=2\cdot3\cdot5\cdot67=2010$.

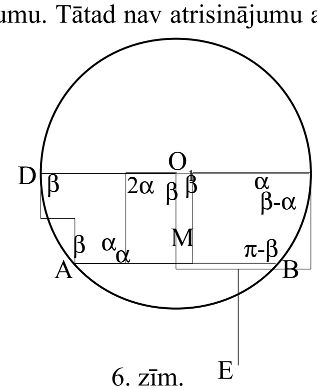
2) $n=2\cdot(19^{10}-19)$ dalās ar 4, tātad nav dažādu pirmskaitļu reizinājums.

10.4. Atbilde: nevar.
Projicējam visus vektorus uz taisni, kas perpendikulāra piramīdas pamata plaknei. Tad pamata plaknes vektori projicējas nulles vektoros, bet sānu šķautņu vektori vienāda garuma paralēlos vektoros. Tā kā šo vektoru skaits ir nepāra skaitlis, tad summā iegūt nulles vektoru nevar.

10.5. Atbilde: 7 lampiņas.
Vispirms ievērosim, ka katru slēdzi ir vērts pārslēgt ne vairāk kā vienreiz. Aplūkosim trīs lampiņu grupas: [2, 3 un 6], [2, 5 un 10], [4 un 8]. Katrā no tām iespējams ieslēgt ne vairāk kā divas lampiņas. Ja izslēgta ir lampiņa ar numuru 2, tad izslēgtas ir arī abas trešās grupas lampiņas un šajās trijās grupās kopā ir ne vairāk kā četras ieslēgtas lampiņas. Savukārt, ja 2. lampiņa ir ieslēgta, tad abas trešās grupas lampiņas ir ieslēgtas un pa visām trim grupām kopā ir vismaz divas izslēgtas lampiņas (viena pirmajā un viena – otrajā grupā). Tātad iespējams ieslēgt ne vairāk kā septiņas lampiņas.
Ja ieslēdz slēdžus 2, 3 un 7, tad ieslēgtas ir septiņas lampiņas 2, 3, 4, 7, 8, 9, 10.

11.1. Pēc moduļa 3 iegūstam kongruenci $1^x+(-1)^y\equiv1^z \pmod 3$, kurai nav atrisinājumu. Tātad nav atrisinājumu arī dotajam vienādojumam.

11.2. Pagarinām rādiusu O_1C līdz diametram CD (skat. 6. zīm.). Veidojas vienādsānu trapece ABCD. Novelkam leņķa AO_1C bisektrisi, tās krustpunktu ar taisni CB apzīmējam ar E. Apzīmējam $\angle ADC=\angle DCB=\beta$, $\angle DO_1A=2\alpha=\pi-2\beta$. Tad $\angle AO_1C=2\beta$ un $\angle EO_1C=\beta$. Tātad ΔO_1EC ir vienādsānu, $EC=EO_1$. Vienādsānu trijstūrī ΔAO_1C taisne O_1E satur leņķa AO_1C bisektrisi, tad tā satur arī augstumu un mediānu. Tātad $O_1E\perp AC$ un AM=MC. Nogrieznis EM trijstūrī ACE ir gan



6. zīm.

augstums, gan mediāna, tāpēc ΔAEC ir vienādsānu trijstūris un EC=EA. Tātad punkts E ir ω_2 centrs, kas pēc konstrukcijas atrodas uz taisnes BC.

11.3. $x_{n+1}^3 = x_n^3 + 3 + \alpha$, kur $\alpha>0$. Aplūkojam virkni $y_n = x_n^3$. Tad $y_{333} > 1000$, no tā seko, ka $x_{333} > 10$.

11.4. Pieņemsim pretējo. Tad pirmās krāsas skaits jebkurās divās rindiņās ir dažāds. Tātad pirmajā krāsā nokrāsoto rūtiņu skaits ir ne mazāks par $0 + 1 + 2 + \cdots 13 + 14 = 105$. Analoģiski arī pārējām krāsām. Tātad tabulā jābūt ne mazāk kā $3 \cdot 105 = 315$ rūtiņām, bet tabulā ir tikai 225 rūtiņas. Iegūta pretruna.

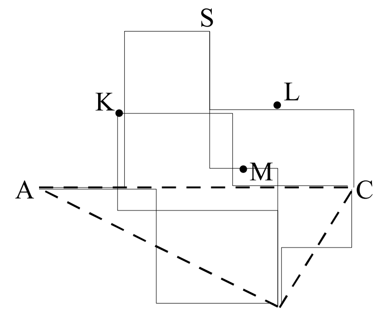
11.5. Aplūkosim tādu punktu sadalījumu pa pāriem, ka visu 100 nogriežņu garumu summa ir pati mazākā iespējamā. Pierādīsim, ka šajā gadījumā nogriežņi nekrustojas.

Pieņemsim pretējo, ka ir divi nogriežņi AC un BD, kas krustojas punktā O. Pieņemsim arī, ka A un B ir zili punkti, bet C un D – sarkani. Tad, nogriežņu AB un CD vietā novelkot nogriežņus AD un BC, to garumu summa ir mazāka nekā sākumā (pamatojums seko no trijstūra nevienādības: AC+BD=(AO+OC)+(BO+OD)= =(AO+OD)+(BO+OC)>AD+BC), kas ir pretrunā ar to, ka apskatāmajā sadalījumā garumu summa bija minimālā iespējamā.

12.1. Atbilde: Nē, neeksistē.

Vienādojumam $\sin x = ax$ ir sakne x=0, kā arī, ja x ir tā sakne, tad arī -x ir sakne, jo $\sin(-x) = -\sin x$. Tātad šī vienādojuma sakņu skaits vienmēr būs nepāra skaitlis.

12.2. Atbilde: Nē, neeksistē.



7. zīm.

Pieņemsim, ka tāda piramīda eksistē, apzīmēsim to ar SABC. Sānu šķautņu viduspunktus apzīmēsim ar K, L, M (skat. 7. zīm.). Apzīmēsim vektorus $\overrightarrow{SA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{SB} = \vec{b}$ un $\overrightarrow{SC} = \vec{c}$. Tad $\overrightarrow{BK} = -\vec{b} + \frac{\vec{a}}{2}$ un $\overrightarrow{CK} = -\vec{c} + \frac{\vec{a}}{2}$. Pieņemot, ka $\angle$BKC=90°, t.i., BK$\perp$KC, šo vektoru skalārais reizinājums ir 0. Tātad

$$\left(-\vec{b} + \frac{\vec{a}}{2}\right) \cdot \left(-\vec{c} + \frac{\vec{a}}{2}\right) = \vec{b} \cdot \vec{c} - \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c}) \cdot \vec{a} + \frac{1}{4}\vec{a} \cdot \vec{a} = 0.$$

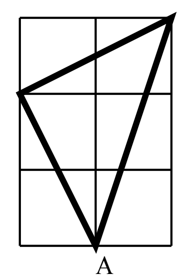
Līdzīgi, apskatot situāciju pie punktiem L un M, iegūstam

$\vec{a} \cdot \vec{b} - \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} + \frac{1}{4}\vec{c} \cdot \vec{c} = 0$ un $\vec{a} \cdot \vec{c} - \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c}) \cdot \vec{b} + \frac{1}{4}\vec{b} \cdot \vec{b} = 0$. Saskaitot iegūtās vienādības, iegūstam

$\frac{1}{4}(\vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} + \vec{c} \cdot \vec{c}) = 0$, kas ir aplams. Tātad vismaz viens no leņķiem BKC, ALB un AMC nav taisns.

12.3. Atbilde: π.

Skat., piem., 8. zīm; dotie saskaitāmie atbilst leņķiem ar virsotni A; to summa ir π.



8. zīm.

12.4. Atbilde: n=2010.

Naturālam skaitlim $x = p_1^{k_1} p_2^{k_2} ... p_m^{k_m}$ (p_i – dažādi pirmskaitļi) pavisam ir $(k_1 + 1)(k_2 + 1)...(k_m + 1)$ dažādi dalītāji.

(1) Tā kā 16=2^4, tad meklējamais skaitlis n var būt izsakāms vai nu kā $n = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4$, vai $n = p_1^3 \cdot p_2 \cdot p_3$, vai $n = p_1^3 \cdot p_2^3$, vai $n = p_1^7 \cdot p_2$, vai $n = p_1^{15}$ (p_i – dažādi pirmskaitļi).

(2) No dotā $n = 2 \cdot 5 \cdot (2 \cdot 10^{k-1} + 1)$ un n dalās ar 67, kā arī viegli ievērot, ka $2 \cdot 10^{k-1} + 1$ dalās ar 3 visiem $k \geq 1$ (tā kā šīs izteiksmes vērtība dalās ar 67, k>1). Tātad skaitlim n ir vismaz četri dažādi pirmreizinātāji: 2, 3, 5 un 67. Tātad, saskaņā ar (1) secinājumu $n = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67 = 2010 = 2(10^3 + 5)$.

12.5. Atbilde: nevar.

Pieņemsim, ka to izdevies izdarīt. Skatoties uz ceturto koordināti d, redzam, ka jāizpilda 7 operācijas. Tā kā skaitli a izmaina tikai pirmā operācija, tad jāizpilda trīs reizes pirmā operācija un četras reizes otrā. Izpildot otro operāciju četras reizes, b samazinās par 4. Tā kā pēc jebkuras operācijas izpildīšanas d palielinās par 1, tad, pielietojot pirmo operāciju trīs reizes, mēs palielināsim b vismaz par 1+2+3=6, t.i. b beigu lielums pārsniedz sākotnējo vismaz par 6-4=2, kas ir pretrunā ar nosacījumiem.
