„Profesora Cipariņa kluba” 1. nodarbība 2007./2008. mācību gadā
Uzdevumu atrisinājumi.

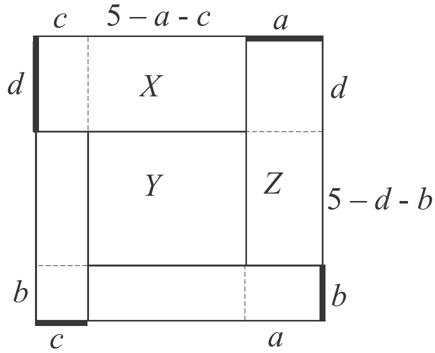
1. Skat., piem., 1.zīm.

		-2		
	-2	1	2	
-2	1	2	-2	1
	2	-2	1	
		1		

1.zīm.

Komentārs. Ievērosim, ka arī visu ierakstīto skaitļu summa ir 1. Interesanti būtu noskaidrot jautājumu: kādiem veseliem skaitļiem a un b iespējams panākt, ka katrā no 3 rūtiņām sastāvošā taisnstūrī ierakstīto skaitļu summa ir a, bet visu ierakstīto skaitļu summa ir b?

2. Pagarinām taisnstūru malas līdz krustpunktiem ar kvadrāta malām. Tad viss kvadrāts sadalās taisnstūros. Katram taisnstūrim pretējās malas ir vienādas. Apzīmējot tumši iekrāsoto nogriežņu garumus metros ar a; b; c; d, iegūstam ainu, kas parādīta 2.zīm.

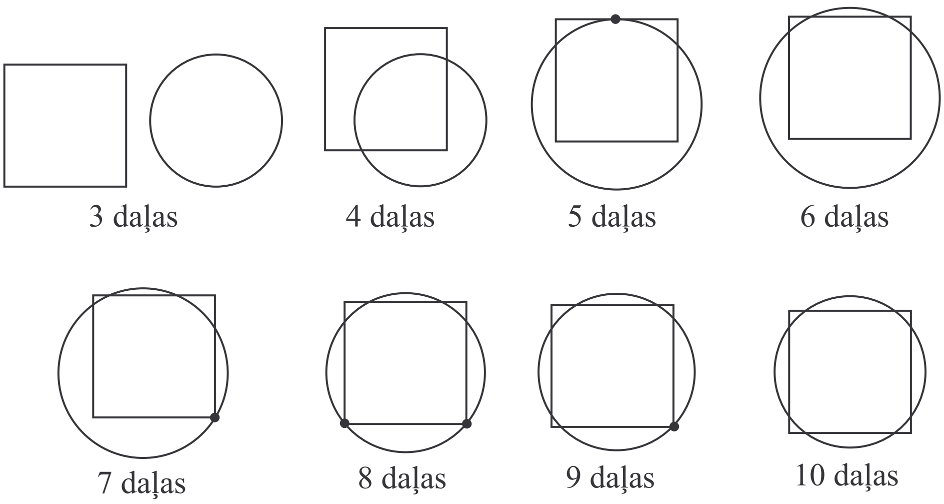


2.zīm.

Taisnstūra X apakšējā horizontālā mala vienāda ar tā augšējo horizontālo malu, tāpēc tās garums ir $5-a-c$. Līdzīgi iegūstam, ka taisnstūra Z kreisās malas garums ir $5-d-b$. Tātad taisnstūrim Y vienas horizontālās malas garums ir $5-a-c$, bet vienas vertikālās malas garums ir $5-d-b$. Tā kā taisnstūrim Y pretējās malas ir pa pāriem vienādas, tad Y visu malu garumu summa ir $S=(5-a-c)+(5-d-b)+(5-a-c)+(5-d-b)=20-2(a+b+c+d)$. Saskaņā ar uzdevumā doto $a+b+c+d=6$. Tāpēc $S=20-2\cdot 6=20-12=8$.

Tāda situācija patiešām ir iespējama, ja, piemēram, $a=b=c=d=1\frac{1}{2}$. (Tad vidējais taisnstūris sanāk kvadrāts.) Protams, ir iespējami arī daudzi citi gadījumi.

3. Atbilde: jebkurā skaitā daļu no 3 līdz 10 ieskaitot.
Risinājums: Vispirms parādīsim, ka minētās vērtības ir iespējamas. To var redzēt 3.zīm.



3.zīm.

Tagad pierādīsim, ka citāds daļu skaits nevar būt.

Skaidrs, ka nevar būt viena daļa, jo gan riņķa līnija, gan kvadrāta kontūrs katrs atsevišķi sadala plakni divās daļās. Nevar būt arī tikai divas daļas: riņķa līnija sadala plakni 2 daļās, un kvadrāta kontūra uzzīmēšana neradītu jaunas daļas tikai tad, ja tas sakristu ar riņķa līniju, bet tā nevar būt.

Padomāsim, vai varētu rasties vairāk par 10 daļām.

Šķirosim visas iespējas.

A. Ja riņķim un kvadrātam nav kopīgu iekšēju punktu, tad acīmredzot ir tikai 3 daļas.

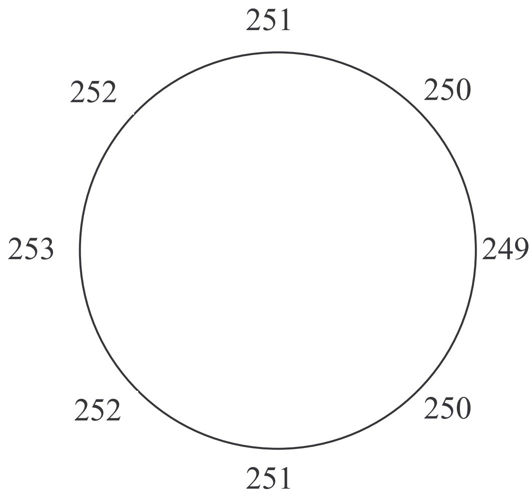
B. Ja riņķim un kvadrātam ir kopēji iekšēji punkti, tad tie visi veido vienu plaknes daļu. Otru daļu veido tie plaknes punkti, kas ir gan ārpus kvadrāta, gan ārpus riņķa. Atliek noskaidrot, cik, vislielākais, var būt riņķa daļu, kas ir ārpus kvadrāta, un kvadrāta daļu, kas ir ārpus riņķa.

Katra kvadrāta mala veido augstākais vienu hordu, tāpēc izveidojas ne vairāk par 4 hordām. Katra horda atšķeļ no riņķa augstākais vienu daļu, un šīm daļām nav kopīgu iekšēju punktu. Tāpēc ir ne vairāk par 4 riņķa daļām, kas ir ārpus kvadrāta. Pie katras kvadrāta malas var veidoties ne vairāk kā divas kvadrāta daļas, kas atrodas ārpus riņķa (pretējā gadījumā kvadrāta malai jābūt vairāk nekā 2 kopīgiem punktiem ar riņķa līniju, bet tas nevar būt). Tātad kopā ir ne vairāk kā $4 \cdot 2 = 8$ šādas veidošanās. Tā kā katra kvadrāta daļa, kas ir ārpus riņķa, veidojas pie divām kvadrāta malām, tad šādu daļu nav vairāk kā $\frac{8}{2} = 4$.

Tātad kopējais daļu skaits nepārsniedz $1 + 1 + 4 + 4 = 10$, k.b.j.

4. Atbilde: a) jā, b) nē.

Risinājums. a) skat., piem., 4.zīm. Viegli pārbaudīt, ka katru divu pretējo skaitļu summa ir 502, tāpēc visu skaitļu summa ir $502 \cdot 4 = 2008$.

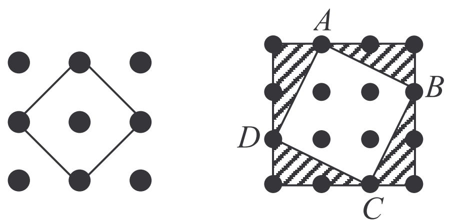


4.zīm.

b) ja divi veseli skaitļi viens no otra atšķiras par 1, tad viens no tiem ir pāra, bet otrs – nepāra. Tāpēc četros grozos būtu jābūt pāra skaitam, bet četros – nepāra skaitam ābolu. Bet četru pāra un četru nepāra skaitļu summa ir pāra skaitlis, kas nevar būt 2007.

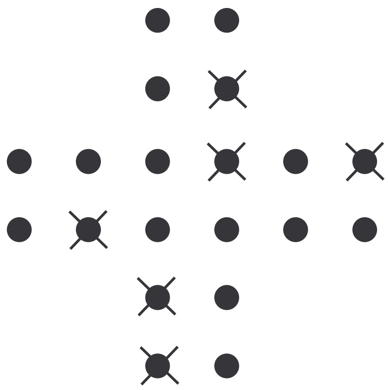
5. Ievērosim, ka $VAUVAURRR = VAUVAU000 + RRR$ (pirmā saskaitāmā 3 pēdējie cipari ir nulles) $= VAUVAU \cdot 1000 + RRR$. Summa *VAUVAURRR* dalās ar 56, tātad arī ar 8 (jo $56 = 8 \cdot 7$). Saskaitāmais $VAUVAU \cdot 1000$ dalās ar 8, jo $1000 = 125 \cdot 8$ dalās ar 8. Tāpēc arī otram saskaitāmajam *RRR* jādalās ar 8.
Ievērojam, ka $RRR = R \cdot 111$. Reizinātājs 111 ir nepāra skaitlis, tāpēc dalīšanos ar 8 neietekmē; tāpēc R jādalās ar 8. Tātad pastāv tikai divas iespējas: **R = 8 vai R = 0.**
Tālāk ievērosim, ka $KRAA = KR \cdot 100 + A \cdot 11$. Mēs jau ieguvām, ka $R = 8$ vai $R = 0$. Tāpēc *KR* ir pāra skaitlis, un *KR* dalās ar 2. Tāpēc $KR \cdot 100$ dalās ar 8. Tā kā gan *KRAA*, gan $KR \cdot 100$ dalās ar 8, tad līdzīgi kā iepriekš iegūstam, ka *A* dalās ar 8; tāpēc **A = 8 vai A = 0.**
Tā kā burti *R* un *A* apzīmē dažādus ciparus, tad uzdevumā minētajā situācija nav iespējama, ja ne *A*, ne *R* nedrīkst būt 0. Ja ciparu 0 var izmantot, tad viegli iegūstam, piemēram, iespēju $VAUVAURRR = 381381000$ un $KRAA = 5088$.

6. Ievērosim, ka 4 rūtiņu virsotnes var veidot arī „slīpi" novietotu kvadrātu (skat., piem., 5.zīm.).

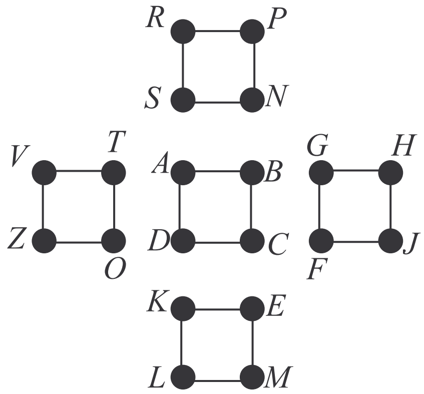


5.zīm.

Pamatosim, piemēram, ka *ABCD* ir kvadrāts. Iesvītrotie taisnleņķa trijstūri ir vienādi (pazīme kk), tātad $AB = BC = CD = DA$. Tālāk $\angle DAB$ iegūstam, no 180^0 atņemot taisnleņķa trijstūra divu šauro leņķu summu; tāpēc $\angle DAB = 90^0$. Vajadzīgais pierādīts: četrstūris, kam visas malas vienādas un viens leņķis taisns, ir kvadrāts. Citu „slīpi novietotu” kvadrātu gadījumos pierādījums ir analoģisks.



6.zīm.

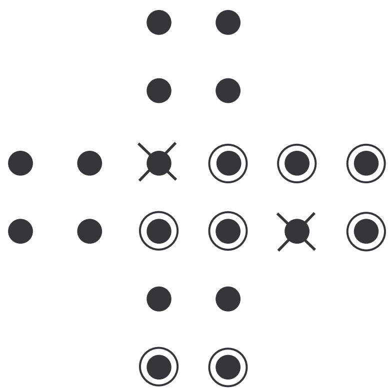


7.zīm.

Uzdevumā prasīto var sasniegt ar 6 virsotņu nodzēšanu (skat. 6.zīm.); pārliecinieties par to patstāvīgi.

Ja mēs gribētu iztikt ar 5 virsotņu nodzēšanu, tad katrā no 7.zīm. redzamajiem 5 kvadrātiem jānodzēš **tieši viena** virsotne. Varam pieņemt, ka centrālajā kvadrātā nodzēsta virsotne *A*. Tad *B*; *C*; *D* netiek nodzēstas. Lai „atbrīvotos” no kvadrāta *BDEF*, jānodzēš vismaz viena no virsotnēm *E* un *F*; varam pieņemt, ka *F* tiek nodzēsta.

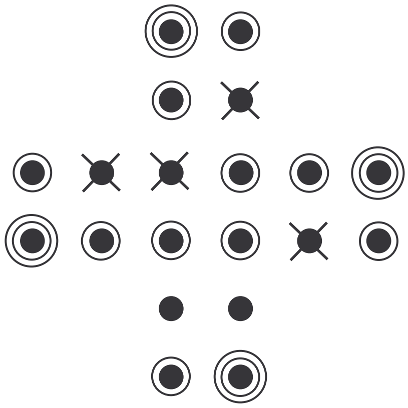
Tad *G*, *H*, *J* netiek nodzēstas. Lai „atbrīvotos” no kvadrāta *DCEK*, jānodzēš vismaz viena no virsotnēm *E* un *K*; tātad ne *L*, ne *M*, netiek nodzēstas. Iegūstam 8.zīm. (šeit un turpmāk ar aplīšiem tiek apvilktas tās virsotnes, kas noteikti netiek nodzēstas).



8.zīm.

Lai atbrīvotos no kvadrāta *MJNO*, jānodzēš vai nu *N*, vai *O* (apzīmējumus skat. 7.zīm.). Apskatām abas iespējas.

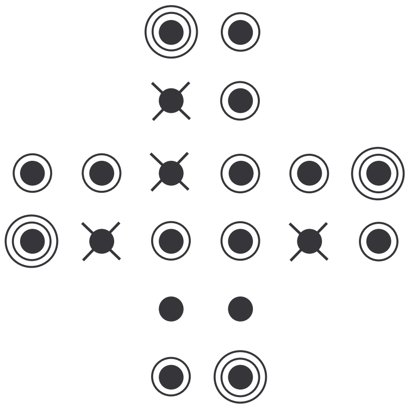
I Pieņemsim, ka nodzēsts *N*. Tad *P*, *R*, *S* nav nodzēsti. Kvadrāta *SBDT* dēļ jānodzēš *T*; tāpēc *V*, *Z*, *O* nav nodzēsti. Iegūstam 9.zīm. attēloto ainu:



9.zīm.

Tagad kvadrātā *RHMZ* nav nodzēsta neviena virsotne – pretruna.

II Pieņemsim, ka nodzēsts *O*. Tad *Z*, *V*, *T* nav nodzēsti. Kvadrāta *SBDT* dēļ jānodzēš *S*; tad *R*, *P*, *N* nav nodzēsti. Iegūstam pretrunu kā iepriekšējā gadījumā (skat. 10.zīm).



10.zīm.

Tātad, nodzēšot tikai 5 virsotnes, uzdevuma prasības nav izpildāmas. Tātad mazākais nodzēšamo virsotņu skaits ir 6.

7. Atbilde: nē, nevar.

Risinājums. Iedomāsimies, ka tas izdarīts, un apskatīsim 420 pēc kārtas iestādītus kokus. Tā kā $420 = 3 \cdot 140$, varam tos sadalīt 140 grupās pa trim pēc kārtas iestādītiem kokiem katrā. Tā kā katrā grupā jābūt vismaz vienam bērzam, tad vismaz 140 no šiem kokiem jābūt bērziem.

Līdzīgi iegūstam, ka no šiem kokiem vismaz $\frac{420}{4} = 105$ jābūt kļavām, vismaz $\frac{420}{5} = 84$ - ozoliem, vismaz $\frac{420}{6} = 70$ - liepām un vismaz $\frac{420}{7} = 60$ - eglēm. Bet $140 + 105 + 84 + 70 + 60 = 459 > 420$. Iegūta pretruna, tātad uzdevumā prasītais nav iespējams.

8. Atbilde: nē, nevar.

Risinājums. Pieņemsim, ka tā tomēr noticis. Pierādīsim, ka **tādā gadījumā katram draugam beigās būtu vismaz 4 āboli.** Ja tas būs pierādīts, tad no nosacījuma, ka visiem draugiem beigās bija atšķirīgi ābolu daudzumi, sekos, ka kopā visiem draugiem beigās ir **vismaz** $4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 39$ āboli (saskaitījām

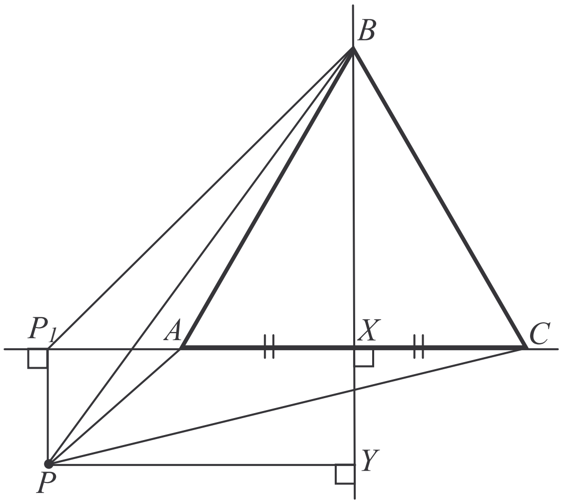
mazākos iespējamos 6 dažādus naturālus skaitļus, kas nav mazāki par 4). Bet draugiem sākumā bija $6\times 6 = 36$ āboli. Tā kā $39 > 36$, iegūta pretruna, tātad mūsu pieņēmums bijis nepareizs.
Atliek pierādīt augstāk izcelto apgalvojumu.
Tiešām, ja kādam draugam beigās bija **ne vairāk** par 3 āboliem, tad **vismaz** 6 – 3 ābolus viņš ir uzdāvinājis citiem. Bet tā ir pretruna ar mūsu pieņēmumu, ka arī **šis** draugs uzdāvinājis citiem mazāk ābolu, nekā viņam bija beigās. Tātad tāda drauga nav.

9. Uzdevuma nosacījumos ietverto formulējumu „datumi atšķiras ne vairāk kā par 2 nedēļām” var saprast divējādi (tas nav matemātisks jēdziens un nav precīzi definēts nevienā mācību grāmatā). Ja mēs uzskatām, ka, piemēram, datumi „31.decembris” un „1.janvāris” atšķiras viens no otra par 1 dienu, tad uzdevuma risinājums varētu būt šāds.
Pieņemsim no pretējā, ka katriem diviem no minētajiem 25 skolēniem dzimšanas dienu datumi atšķiras viens no otra vairāk kā par 2 nedēļām. Tas nozīmē, ka visas 25 dzimšanas dienas ir dažādas un starp katrām divām viena otrai sekojošām dzimšanas dienām ir vismaz 14 citas dienas. Attēlojot visas gada dienas uz apļa ar 366 (vai 365) punktiem, iegūstam: uz apļa jābūt 25 punktiem, kas attēlotu dzimšanas dienas, un vēl vismaz 14 punktiem katrā no intervāliem starp divām dzimšanas dienām; tātad kopā uz apļa jābūt vismaz $25 + 14\cdot 25 = 375$ *punktam – pretruna. Tātad mūsu pieņēmums ir nepareizs, un uzdevumā minētā situācija nav iespējama.*
Ja turpretī mēs uzskatām, ka atšķirības starp datumiem jāapskata viena un tā paša kalendārā gada ietvaros (un tātad 1.janvāris no 31.decembra atšķiras par 364 vai 365 dienām), tad uzdevuma apgalvojums ir nepareizs. Var gadīties, ka klases skolēni dzimuši gada 1., 16., 31., 46., ... dienā; tad katriem diviem no viņiem dzimšanas dienu datumi atšķiras viens no otra vismaz par 15 dienām, t.i., **vairāk** nekā par 2 nedēļām.
Mums jāpamato, kāpēc mūsu piemērā minētajā veidā izdosies gadā izvietot 25 skolēnus. To var pamatot vismaz divos dažādos veidos:
a) izrakstot visus 25 iedomātos dzimšanas dienu kārtas numurus gada dienu sarakstā:
1, 16, 31, 36, 61, 76, 91, 106, 121, 136, 151, 166, 181, 196, 211, 226, 241, 256, 271, 286, 301, 316, 331, 346, 361
b) aprēķinot uzreiz pēdējā skolēna domājamo dzimšanas dienas kārtas numuru gada dienu sarakstā. Tā kā pavisam ir 25 kārtas numuri un katrs nākošais ir par 15 lielāks nekā iepriekšējais, tad pēdējam numuram būtu jābūt $1+\underbrace{15+15+\ldots+15}_{24\ reizes} = 1+15\cdot 24 = 1+360 = 361$.
Tā kā $361 < 365$, tas ir iespējams.

10. Atbilde: māsas māja jāceļ brāļu māju veidotā vienādmalu trijstūra centrā.
Pierādījums. Apzīmēsim brāļu mājas ar *A*, *B* un *C*, trijstūra *ABC* centru – ar *M*. Pierādīsim: **ja punkts *P* nesakrīt ar *M*, tad**

$$\mathbf{PA + PB + PC + > MA + MB + MC} \qquad (*)$$

Šķirosim vairākus gadījumus atkarībā no *P* atrašanās vietas.
I Punkts *P* un ΔABC atrodas **dažādās pusēs** kādai no taisnēm *AB*, *BC*, *CA* (skat., piem., 11. zīm.)



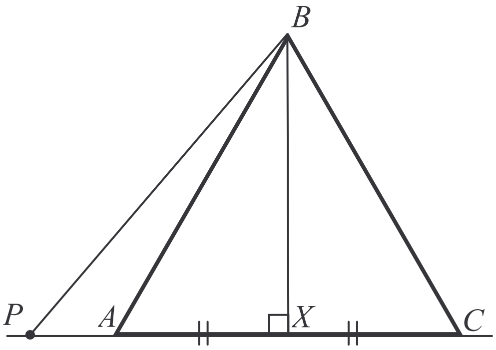
11.zīm.

Konstruējam punktus P_1, X, Y, kā parādīts 11.zīmējumā. Tā kā vienādmalu trijstūrī augstums ir arī mediāna, tad $AX = XC$. Un, tā kā slīpne garāka par tās projekciju, iegūstam nevienādības $PA > P_1A$ (1) un $PC > P_1C$ (2).

Tā kā trijstūrī BP_1P leņķis BP_1P ir plats, tad $PB > P_1B$ (3). Saskaitot (1), (2) un (3), iegūstam

$$PA + PB + PC > P_1A + P_1B + P_1C \qquad (4)$$

II Punkts P atrodas uz kādas no taisnēm AB, BC, CA, bet nav atbilstošās malas punkts (skat., piem., 12.zīm.)



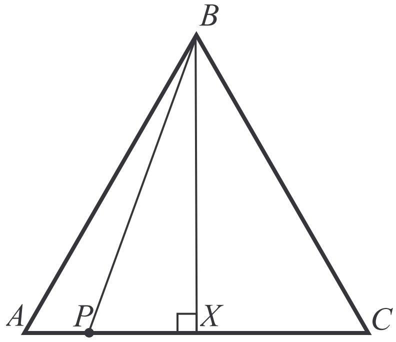
12.zīm.

Acīmredzami $PA + PC > AC = XA + XC$ (5) un PB > XB (6). Saskaitot (5) un (6), iegūstam

$$PA + PB + PC > XA + XB + XC \qquad (7)$$

III Punkts P pieder kādai no malām AB, BC, CA; varam pieņemt, ka P pieder malai AC. Ja X ir AC viduspunkts, tad $PA + PC = AC = XA + XC$ (8) un $PB \geq XB$ (9), turklāt nevienādība (9) pārvēršas par vienādību tad un tikai tad, ja P sakrīt ar X. Saskaitot (8) un (9), iegūstam

$$PA + PB + PC \geq XA + XB + XC = AC + XB \qquad (10)\text{, skat.13.zīm.}$$



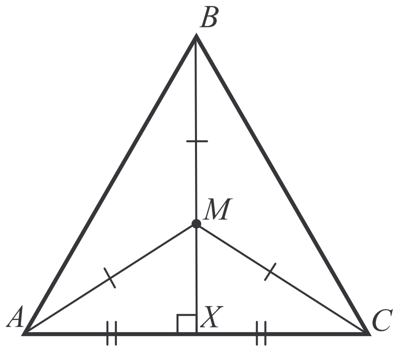
13.zīm.

No **I**, **II**, **III** seko: ja P nav trijstūra ABC iekšējs punkts, tad summa $PA+PB+PC$ nav mazāka par **kādas** trijstūra malas un pret to novilktā augstuma garumu summu. Tā kā vienādmalu trijstūrī visas malas vienādas savā starpā un visi augstumi – arī, tad secinām, ka šādiem punktiem P pastāv nevienādība

$$PA+PB+PC \geq a+h \qquad (11),$$

kur a - ΔABC malas garums, h – tā augstuma garums.

1.lemma Ja ΔABC ir regulārs un M – tā centrs, tad $MA+MB+MC<a+h$ (a - ΔABC malas garums, h – tā augstuma garums).



14.zīm.

No vienādmalu trijstūra īpašībām zināms, ka $MA = MB = MC$, M atrodas uz BX, $MX \perp AC$ un $\angle MCX = 30°$. Vienādmalu trijstūrī augstums ir arī mediāna, bet centrs ir mediānu krustpunkts. No mediānu īpašībām seko, ka $h = 3\cdot MX$ un $MX = \frac{1}{2}MB$. Tā kā taisnleņķa trijstūrī MXC šaurais leņķis C ir 30° liels, tad $MX = \frac{1}{2}MC$. Ņemot to visu vērā, lemmas apgalvojumu var pierakstīt kā

$$3\cdot MA < AC + 3\cdot MX \qquad \text{jeb}$$

$$3\cdot MA < AC + \frac{3}{2}MA, \qquad \text{jeb}$$

$$\frac{3}{2}MA < AC, \qquad \text{jeb}$$

$$1\frac{1}{2}MB < AB \qquad (\text{jo } MB = MA \text{ un } AB = AC), \text{ jeb}$$

$$BX < AB,$$

kas ir acīmredzams, jo taisnleņķa trijstūrī AXB hipotenūza garāka par kateti. Lemma pierādīta.

No lemmas un no (11) seko: ja P nav ΔABC iekšējs punkts, tad (*) ir spēkā.

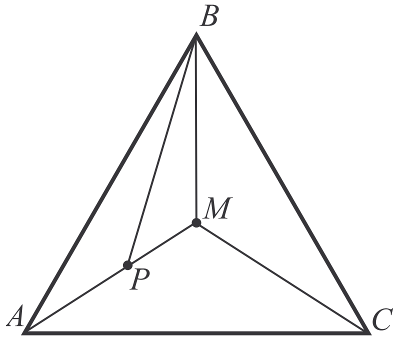
Atliek pierādīt (*) ΔABC iekšējiem punktiem P, kas nesakrīt ar M.

2.lemma Ja punkts P atrodas ΔABC iekšpusē un nesakrīt ar tā centru M, tad vismaz viens no leņķiem APB, BPC, CPA nav 120° liels.

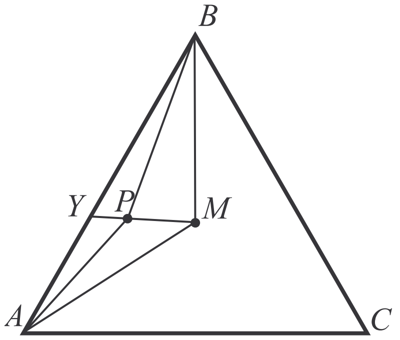
Pierādījums. Ievērojam, ka $\angle AMB = \angle BMC = \angle CMA = 120°$. Pastāv divas iespējas:

1) punkts P pieder kādam no nogriežņiem MA, MB, MC (varam pieņemt, ka MA; skat.15.zīm.),

2) punkts P nepieder MA, MB, MC. Tad tas ir iekšējs punkts vienam no trijstūriem AMB, BMC, CMA (varam pieņemt, ka AMB; skat. 16.zīm.).



15.zīm.



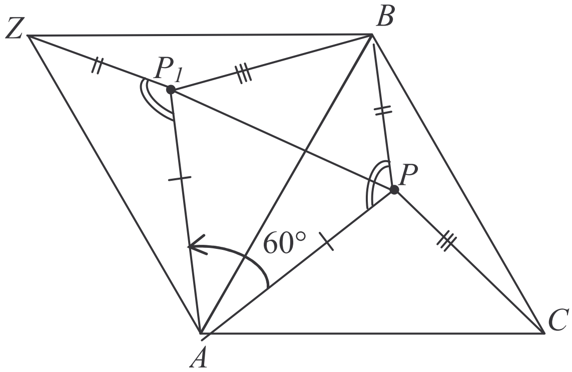
16.zīm.

Pirmajā gadījumā, izmantojot ΔPMB ārējā leņķa īpašību, iegūstam $\angle APB = \angle BPM + \angle BMP > \angle BMP = \angle BMA = 120°$.

Otrajā gadījumā no ΔBMP un ΔAMP ārējo leņķu īpašībām līdzīgi iegūstam $\angle BPY > \angle BMP$ un $\angle APY > \angle AMP$; saskaitot šīs nevienādības, iegūstam $\angle APB > \angle AMB = 120°$.

Lemma pierādīta.

Tagad pieņemsim, ka ABC – vienādmalu trijstūris un P – tā iekšējs punkts, kas nesakrīt ar centru M. Saskaņā ar 2.lemmu varam pieņemt, ka $\angle APB \neq 120°$.



17.zīm.

Pagriežam ΔABC ap punktu A par 60° lielu leņķi pretēji pulksteņa rādītāja kustības virzienam; reizē ar visu trijstūri pagriežas arī punkts P, nonākot stāvoklī P_1. Tā kā $AC = AB$ un $\angle CAB = 60°$, punkts C nonāk punktā B.

Punktu, kurā nonāk B, apzīmēsim ar Z. Pēc definīcijas $P_1Z = PB$, $P_1A = PA$ un $\angle P_1AP = 60°$. Redzam, ka ΔP_1AP ir vienādsānu trijstūris ar virsotnes leņķi 60°, tātad tas ir vienādmalu. Tāpēc $PA = P_1P$. Secinām, ka

$$PB + PA + PC = ZP_1 + P_1P + PC \qquad (12)$$

Tā kā ΔAP_1P ir vienādmalu, tad $\angle AP_1P = 60°$. Tā kā $\angle ZP_1A = \angle BPA \neq 120°$, tad $\angle ZP_1P = \angle ZP_1A + \angle AP_1P \neq 180°$. Tātad punkti Z, P_1 un P neatrodas uz vienas taisnes; tāpēc $ZP_1 + P_1P > ZP$ un

$$ZP_1 + P_1P + PC > ZP + PC \geq ZC \qquad (13)$$

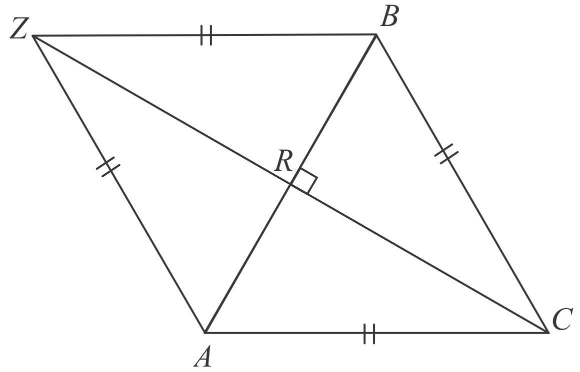
No (12) un (13) seko, ka

$$PA + PB + PC > ZC \qquad (14)$$

Ja mēs pratīsim pierādīt, ka

$$MA + MB + MC = ZC \qquad (15),$$

tad no (14) un (15) sekos mums vajadzīgā sakarība (*), un uzdevums būs atrisināts.



18.zīm.

Tā kā četrstūris *ACBZ* sastāv no diviem vienādmalu trijstūriem, tad tas ir rombs; tāpēc $AB \perp CZ$ un $CZ = 2 \cdot CR$. Mums jāpierāda, ka $2 \cdot CR = MA + MB + MC$. Atceramies, ka $MA = MB = MC$; tātad jāpierāda, ka $2 \cdot CR = 3 \cdot MC$ jeb $MC = \frac{2}{3}CR$. Bet tas tieši seko no vienādmalu trijstūra īpašībām (skat. 1.lemmas pierādījumu).

Līdz ar to uzdevums atrisināts.