„Profesora Cipariņa kluba” 2. nodarbība 2007./2008. mācību gadā
Uzdevumu atrisinājumi.

**1.** Nē, nevar. No katriem trim pēc kārtas ņemtiem naturāliem skaitļiem tieši viens dalās ar 3. Tāpēc vismaz viens no Jānīša sareizinātajiem skaitļiem dalās ar 3. Tātad arī iegūtais reizinājums dalās ar 3. Bet skaitlim, kas pats dalās ar 3, arī ciparu summa dalās ar 3. Tomēr 2 nedalās ar 3. Tātad uzdevumā minētā situācija nav iespējama.

**2.** Apzīmēsim klades, zīmuļa un burtnīcas cenas (piemēram, santīmos) attiecīgi ar k, z, b. No uzdevumā dotā seko:

$$k + 2z > 3b \qquad (1)$$

$$3k + 2z > 4b \qquad (2)$$

Pareizinot (1) abas puses ar 2, iegūstam

$$2k + 4z > 6b \qquad (3)$$

Saskaitot (2) un (3) labās un kreisās puses, iegūstam

$$(3k + 2z) + (2k + 4z) > 4b + 6b$$

jeb

$5k + 6z > 10b$, kas bija jāpierāda.

**3.** Pirmā svēršana var būt šāda:

2 6 | 3 5

1. zīm.

Ja svari ir līdzsvarā, tad visas šeit izmantotās lodītes sver tik, cik uz tām rakstīts. Tātad īpašā lodīte ir 4 vai 1. Otro svēršanu tad izdara šādi:

1 3 | 4

2. zīm.

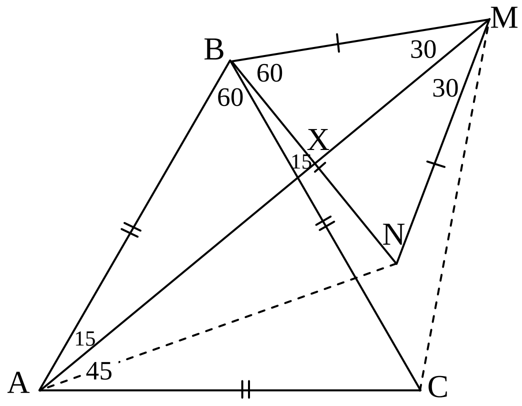
Smagākā lodīte atrodas uz tā kausa, kas nosveras uz leju. Ja turpretī pirmajā svēršanā viens no kausiem nosveras uz leju, tad smagākā lodīte atrodas uz tā. Ja uz leju nosvērās kreisais kauss, otro svēršanu izdarām, kā parādīts 3. zīm., ja labais kauss – 4. zīm.

1 6 | 4 3          3 6 | 4 5

3. zīm.          4. zīm.

Visos gadījumos smagākā lodīte ir tā no abām „aizdomīgajām”, kas otrajā svēršanā nosvērās uz leju.
Iespējami arī daudzi citi risinājumi.

**4.** Konstruējam regulāru trijstūri *BMN*. Tad iegūstam leņķu lielumus, kā parādīts zīmējumā. Redzam, ka $\Delta ABN = \Delta CBM$ (mlm), tātad **AN=CM**.



5. zīm.

Viegli atrast, ka $\angle BXM = 90°$. Tātad MX ir regulārā trijstūra BMN augstums, tātad arī mediāna. Tad $BX = XN$. Seko, ka punkti B un N ir simetriski viens otram attiecībā pret AM. Tāpēc $\Delta ABM = \Delta ANM$ (tie simetriski viens otram attiecībā pret AM), tātad **AB=AN**.

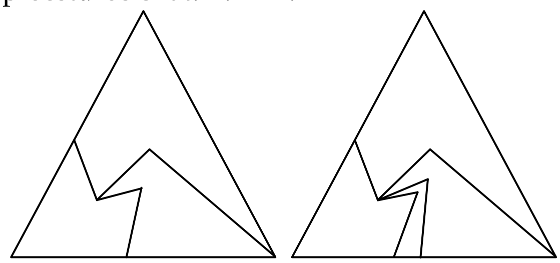
No izceltajām vienādībām seko *AC*=*CM*, tātad $\Delta ACM$ - vienādsānu. Tā kā $\angle MAC = 45°$, no šejienes seko vajadzīgais.

**5.** No dotā seko, ka arī skaitlis $S = d(abc - d) + c(abd - c) + b(acd - b) + a(bcd - a)$ dalās ar 4, jo katrs no četriem saskaitāmajiem dalās ar 4. Atverot iekavas, iegūstam, ka $S = 4abcd - (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$, no kurienes seko, ka $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4abcd - S$.

Tā kā gan *4abcd*, gan S dalās ar 4, tad arī $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ dalās ar 4, kas bija jāpierāda.

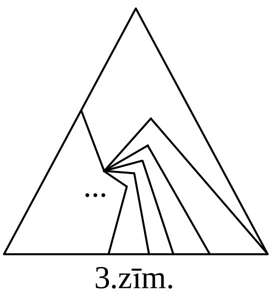
**6. Atbilde:** a) jā, b) jā, c) jā.

Sadalījumus 3 un 4 piecstūros skat. 2. zīm.



2.zīm.

Sadalījums 5, 6, 7, ..., 2007 ieliektos piecstūros iegūst secīgi vienu no otra tāpat, kā 2.b) zīmējums iegūts no 2.a) zīmējuma (skat. 3. zīm.)



3.zīm.

Iespējami daudzi citi risinājumi.

**7.** Ērtības labad apzīmēsim $a+b+c=x$ un $d+e+f=y$.

Tad

$$3-x^2-y^2=3+x^2+y^2-2x^2-2y^2+0=$$
$$=1+1+1+x^2\cdot 1+y^2\cdot 1-2x(a+b+c)-2y(d+e+f)+2xy(ad+be+cf)=$$
$$=1+1+1+x^2(a^2+b^2+c^2)+y^2(d^2+e^2+f^2)-2x(a+b+c)-2y(d+e+f)+$$
$$+2xy(ad+be+cf)=$$
$$=(1+x^2a^2+y^2d^2-2\cdot xa\cdot 1-2\cdot yd\cdot 1+2\cdot xa\cdot yd)+$$
$$+(1+x^2b^2+y^2e^2-2\cdot xb\cdot 1-2\cdot ye\cdot 1+2\cdot xb\cdot ye)+$$
$$+(1+x^2c^2+y^2f^2-2\cdot xc\cdot 1-2\cdot yf\cdot 1+2\cdot xc\cdot yf)=$$
$$=(1-xa-yd)(1-xa-yd)+(1-xb-ye)(1-xb-ye)+(1-xc-yf)(1-xc-yf)=$$
$$=(1-xa-yd)^2+(1-xb-ye)^2+(1-xc-yf)^2\geq 0\text{, jo kvadrāti nav negatīvi.}$$

Tātad $3-x^2-y^2\geq 0$, tāpēc $x^2+y^2\leq 3$ jeb $(a+b+c)^2+(d+e+f)^2\leq 3$, kas bija jāpierāda.

**8.** Ierakstīsim sarkanajās rūtiņās 0 un baltajās rūtiņās 1. Pieņemsim, ka katrā 2x2 rūtiņu kvadrātā ir pāra skaits sarkano (tātad arī pāra skaits balto) rūtiņu. Tad katrā 2x2 rūtiņu kvadrātā summa ir pāra skaitlis. Saskaitot visas šīs atsevišķo kvadrātu summas vienā „lielā” summā S, arī iznāks pāra skaitlis. Bet tā nevar būt, jo „lielajā” summā S

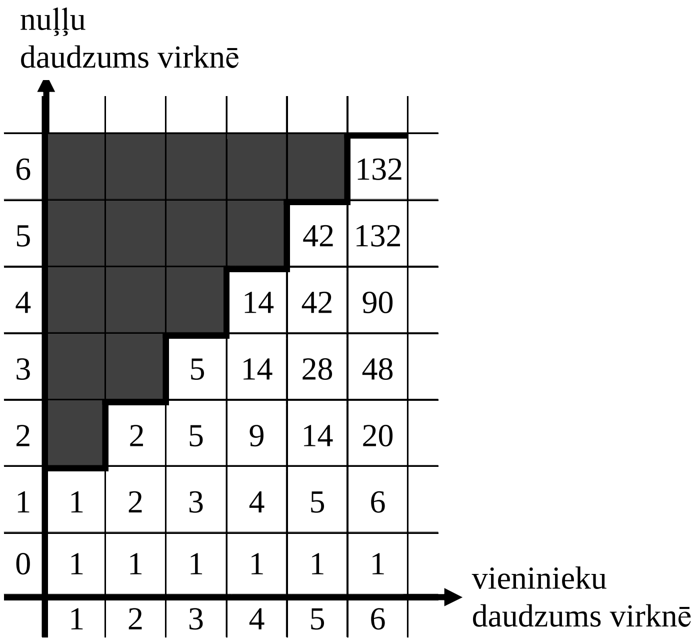
a) iekšējās rūtiņas tiek ieskaitītas četras reizes katra,
b) malējās (ne stūra) rūtiņas – divas reizes katra,
c) stūra rūtiņas – 1 reizi katra.

Tāpēc iekšējo rūtiņu kopējais „ieguldījums” summā S dalās ar 4, malējo rūtiņu kopējais „ieguldījums” – ar 2, bet stūra rūtiņu kopējais „ieguldījums” ir tieši 1. Tāpēc S kā divu pāra skaitļu un vieninieka summa ir nepāra skaitlis.

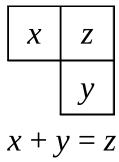
Iegūta pretruna, tātad mūsu sākotnējais pieņēmums ir nepareizs un ir vismaz viens tāds 2x2 rūtiņu kvadrāts, kurā ir nepāra skaits sarkano rūtiņu.

**9. Atbilde:** 132 virknes.

Mēģiniet paši saprast risinājuma gaitu, kas „apslēpta” 4. zīmējumā. Melnajās rūtiņās domājam ierakstītas nulles; tabulu aizpilda pakāpeniski saskaņā ar 5. zīm. Pēc laika mēs publicēsim izvērstu atrisinājumu.




4.zīm.




5.zīm.

**10. Atbilde:** n=9.

**A.** Ja izvēlas 8 pāra skaitļus, tad katru divu summa ir pāra skaitlis, kas lielāks par 2, tātad nav pirmskaitlis. Tāpēc $n \geq 9$.

**B.** Ievērosim, ka katrā no pāriem (1;4), (2;3), (5;8), (6;11), (7;10), (9;16), (12;13), (14;15) kvadrātu summa ir pirmskaitlis (pārbaudīt to patstāvīgi). No katriem 9 izvēlētiem skaitļiem divi būs vienā pārī, jo pāru ir tikai 8; tie arī būs meklējamie.