„Profesora Cipariņa kluba” 3. nodarbība 2007./2008. mācību gadā
Uzdevumu atrisinājumi.

1. Apzīmēsim lielāko no skaitļiem ar *x*, mazāko – ar *y*. Ja *x* būtu pieci vai vairāk cipari, arī summā $x+y$ būtu pieci vai vairāk cipari. Ja *x* būtu ne vairāk kā 3 cipari, tad $x \le 999$ un $y \le 99$, tāpēc $x+y \le 1098 < 2101$. Tāpēc *x* ir tieši 4 cipari.

Ievērosim: ja skaitli *y* iegūtu, izsvītrojot no *x* pirmo, otro vai trešo ciparu, tad skaitļiem *x* un *y* pēdējie cipari būtu vienādi, un summa $x+y$ būtu pāra skaitlis. Tātad skaitli *y* iegūst, izsvītrojot no *x* pēdējo ciparu, un *y* ir trīsciparu (nevis divciparu vai viencipara, kā varētu notikt, piemēram, izsvītrojot **pirmo** ciparu skaitlī 1021 vai 1001).

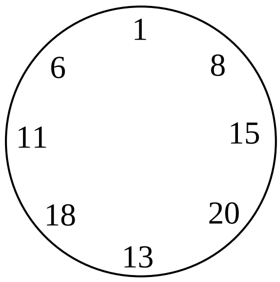
Ja *x* pirmais cipars būtu 2 vai lielāks, tad $x \ge 2000$ un $y \ge 200$, tāpēc $x+y \ge 2200$. Tātad *x* pirmais cipars ir 1. Apzīmējam *x* nākošos ciparus ar *a*, *b*, *c*. Tad $x = \overline{1abc}$ un $y = \overline{1ab}$.

Ja $a \le 8$, tad $x \le 1899$ un $y \le 189$, tāpēc $x+y \le 1899+189 = 2088 < 2101$. Tāpēc $a=9$, $x = \overline{19bc}$ un $y = \overline{19b}$.

Ja $b \ge 2$, tad $x \ge 1920$ un $y \ge 192$; tāpēc $x+y \ge 1920+192 = 2112 > 2101$. Tātad $b<2$, t.i., vai nu $b=0$, vai $b=1$. Ja $b=0$, iegūstam vienādību $\overline{190c}+190 = 2101$, no kurienes $\overline{190c} = 1911$, kas nav iespējams. Ja $b=1$, iegūstam $\overline{191c}+191 = 2101$, no kurienes $\overline{191c} = 2101-191 = 1910$, tātad $c=0$. Līdz ar to meklējamie skaitļi ir 1910 un 191.

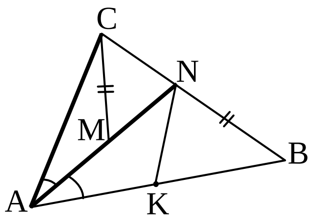
2. Apzīmēsim Maijas izvēlēto skaitļu summu ar *M*; Andra izvēlēto skaitļu summu ar *A*; skaitli, kas ierakstīts neizvēlētajā rūtiņā, ar *x*. Tad ***A* = 3*M*** un ***A* + *M* + *x* = 110** (tiešām, $4+7+11+16+20+5+8+14+25 = 110$). No izceltajām sakarībām seko, ka $4M = 110 - x$, tātad skaitlim $110 - x = 112 - (x+2) = 4 \cdot 28 - (x+2)$ jādalās ar 4. Tā kā $4 \cdot 28$ dalās ar 4, tad $x+2$ jādalās ar 4. Viegli pārbaudīt, ka no visiem tabulā ierakstītajiem skaitļiem šo nosacījumu apmierina tikai $x = 14$. Ja rūtiņa 14 paliek neizvēlēta, tad Maija var izvēlēties skaitļus 4; 5; 7; 8. bet Andris – skaitļus 11; 14; 16; 25. Tā kā $4+5+7+8 = 24$, $11+16+20+25 = 72$ un $24 \cdot 3 = 72$, tad šāds gadījums patiešām ir iespējams. Uzdevums atrisināts.

3. Jā, var. Skat., piem., 1.zīm.



1.zīm.

4. Tā kā $AC = AN$, tad ΔCAN ir vienādsānu; tāpēc $\angle CNA$ ir šaurs. Tāpēc $\angle ANB$ ir plats. Tāpēc trijstūrī *ANB* mala *AB* ir vislielākā, tātad $AB > AN$. Tā kā *M* atlikts uz bisektrises *AN*, tad $AM \le AN < AB$. Iegūstam, ka ***AM* < *AB***.



2. zīm.

Atliekam uz AB tādu punktu K, ka $AK = AM$. Saskaņā ar izcelto nevienādību $AK < AB$, tātad K nesakrīt ar B.

Tā kā $AC = AN$ (dots), $\angle CAN = \angle NAK$ (dots) un $AM = AK$ (saskaņā ar K izvēli), tad $\Delta CAM = \Delta NAK$ (mlm). Tāpēc $CM = NK$. Tā kā $CM = NB$, iegūstam, ka $NK = NB$. Tātad ΔKNB ir vienādsānu; tāpēc $\angle NKB = \angle NBK$. Bet $\angle NKB = \angle CMN$ kā atbilstošie ārējie leņķi vienādos trijstūros. Tātad $\angle CMN = \angle NKB = \angle NBK = \angle CBA$, k.b.j.

5. Apskatīsim jebkurus 100 dažādus skaitļus, kas augošā secībā apzīmēti ar $x_1 < x_2 < x_3 < ... < x_{99} < x_{100}$. Pieņemsim, ka šie skaitļi sadalīti pāros pa divi un katra pāra elementi sareizināti savā starpā. **Tad visu reizinājumu summa nepārsniedz $\boldsymbol{x_1 x_2 + x_3 x_4 + x_5 x_6 + ... + x_{97} x_{98} + x_{99} x_{100}}$** (t.i., visu reizinājumu summa ir vislielākā, ja savā starpā sareizina abus mazākos skaitļus, tad – abus nākošos mazākos, tad – abus nākošos mazākos u.t.t., beidzot – abus lielākos skaitļus).

Pieņemsim uz brīdi, ka šis apgalvojums ir pareizs, un pievērsīsimies mūsu uzdevumam.

Ja uz vienas kartītes ir uzrakstīti skaitļi a un b, tad uzdevumā minēto apgriezto lielumu $\frac{1}{ab}$ varam uztvert arī kā $\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}$. Tātad patiesībā situācija ir šāda: skaitļi $\frac{1}{100}, \frac{1}{99}, \frac{1}{98}, ..., \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}$ ir kaut kā sadalīti pa pāriem un katra pāra elementi sareizināti savā starpā. Saskaņā ar mūsu pieņēmumu iegūto reizinājumu summa ir vislielākā tad, ja $\frac{1}{100}$ reizina ar $\frac{1}{99}$, $\frac{1}{98}$ ar $\frac{1}{97}$, ... , $\frac{1}{4}$ ar $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ ar $\frac{1}{1}$; šīs summas vērtība ir $S = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + ... + \frac{1}{99 \cdot 100}$.

Ja mēs pratīsim pierādīt, ka $S < 1$, tad arī citas iegūstamās summas būs mazākas par 1, jo saskaņā ar pieņēmumu S ir vislielākā iegūstamā summa.

Tāpēc tagad centīsimies pierādīt, ka

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + ... + \frac{1}{99 \cdot 100} < 1 \qquad (*)$$

Pievienosim kreisajā pusē vēl citus pozitīvus saskaitāmos: $\frac{1}{2 \cdot 3}$, $\frac{1}{4 \cdot 5}$, $\frac{1}{6 \cdot 7}$, ..., $\frac{1}{98 \cdot 99}$. No tā kreisās puses vērtība tikai palielināsies. Ja mēs pratīsim pierādīt, ka arī palielinātā kreisā puse mazāka par 1, tad, protams, (*) arī būs pierādīta.

Tāpēc mums pietiek pierādīt, ka

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+...+\frac{1}{96\cdot 97}+\frac{1}{97\cdot 98}+\frac{1}{98\cdot 99}+\frac{1}{99\cdot 100}<1 \qquad (**)$$

Katru saskaitāmo izsacīsim kā starpību:

$$\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$$
$$\frac{1}{3\cdot 4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$$
$$...$$
$$\frac{1}{97\cdot 98}=\frac{1}{97}-\frac{1}{98}$$
$$\frac{1}{98\cdot 99}=\frac{1}{98}-\frac{1}{99}$$
$$\frac{1}{99\cdot 100}=\frac{1}{99}-\frac{1}{100}$$

(visas vienādības viegli pārbaudīt, vienādojot saucējus katras vienādības labajā pusē).

Tad (**) pārveidojas par

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+...+\left(\frac{1}{97}-\frac{1}{98}\right)+\left(\frac{1}{98}-\frac{1}{99}\right)+\left(\frac{1}{99}-\frac{1}{100}\right)<1 \quad (***)$$

Atverot iekavas, gandrīz visi saskaitāmie saīsinās: „$\frac{1}{2}$” sastopams vienreiz ar „-„ zīmi, vienreiz ar „+” zīmi, „$\frac{1}{3}$” tāpat, „$\frac{1}{4}$” tāpat, ..., „$\frac{1}{99}$” tāpat. Nesaīsinās tikai „1” un „$-\frac{1}{100}$”. Tāpēc (***) kreisā puse ir $1-\frac{1}{100}=\frac{99}{100}$; skaidrs, ka $\frac{99}{100}<1$.

Tāpēc (***), līdz ar to arī (**) un (*) ir pierādīta.

Lai uzdevums būtu atrisināts, jāpierāda sākumā minēto apgalvojumu. Izdarīsim to.

Mēs vispirms pierādīsim līdzīgu apgalvojumu 4 skaitļu gadījumam: **ja *a* < *b* < *c* < *d*, tad no visām trim iespējamām pāru reizinājumu summām *ab* + *cd*, *ac* + *bd* un *ad* + *bc* vislielākā ir pirmā, t.i. tā, kurā pāros apvienoti abi mazākie un abi lielākie skaitļi.**

Tiešām, nevienādību $ab+cd>ac+bd$ viegli pakāpeniski pārveidot par

$$ab-ac>bd-cd$$
$$a(b-c)>d(b-c)$$
$$a(b-c)-d(b-c)>0$$
$$(a-d)(b-c)>0$$

Pēdējā iegūtā nevienādība ir patiesa, jo $a-d<0$ un $b-c<0$, bet divu negatīvu skaitļu reizinājums ir pozitīvs. Tāpēc patiesa ir arī sākotnējā nevienādība $ab+cd>ac+bd$. Nevienādību $ab+cd>ad+bc$ pierāda līdzīgi.

Tagad pierādīsim mums vajadzīgo apgalvojumu.

Pieņemsim, ka visu 100 skaitļu pāru reizinājumu summā abi mazākie skaitļi x_1 un x_2 nav sareizināti savā starpā, bet ar citiem skaitļiem: x_1 ar x_i, bet x_2 ar x_j (ne

x_i, ne x_j nav ne x_1, ne x_2). Izmainīsim šo summu: aizstāsim reizinājumus $x_1x_i + x_2x_j$ ar $x_1x_2 + x_ix_j$. Saskaņā ar nupat pierādīto 4 skaitļu gadījumam

$$x_1x_2 + x_ix_j > x_1x_i + x_2x_j,$$

jo x_1 un x_2 ir abi mazākie no skaitļiem x_1, x_2, x_i, x_j. Tā kā citi pāri nemainās, tad nemainās arī to reizinājumi; tātad **visu** reizinājumu summa palielinās.
Apskatām jauno sadalījumu pa pāriem (kurā x_1 un x_2 ir vienā pārī un tātad sareizināti savā starpā). Līdzīgi spriežot, ja x_3 un x_4 nav vienā pārī, tad, aizstājot pārus $x_3x_n + x_4x_k$ ar $x_3x_4 + x_nx_k$ $(n,k \geq 5)$, t.i., apvienojot x_3 un x_4 vienā pārī un viņu agrākos „pāriniekus” otrā pārī, visu reizinājumu summa atkal palielinās. Skaidrs, ka līdzīgi turpinot, mēs nonāksim pie summas $x_1x_2 + x_3x_4 + x_5x_6 + ... + x_{97}x_{98} + x_{99}x_{100}$, kura būs lielāka par sākotnējo (ja tikai tā jau pašā sākumā nebija tieši šāda). Tātad šī summa no visām pāra reizinājumu summām ir lielākā iespējamā, kas arī bija jāpierāda. Uzdevums atrisināts.

6. Pierādīsim, ka šillišallas izvietojušies šādā secībā:

$$\underbrace{mppmppmpp...mpp}_{669\ grupas\ "mpp"}$$

Apskatīsim vispirms pašu kreiso šillišallu. Viņam pa kreisi nestāv neviens, t.i., stāv 0 šillišallas. „Vairāk nekā trešdaļa no 0” nozīmē „vismaz 1”. Apgalvojums „no manis pa kreisi stāv vismaz 1 melis” šī šillišallas mutē ir meli. Tātad viņš ir melis.
Viegli pārbaudīt, ka šī meļa kaimiņš pa labi ir teicis patiesību, tātad ir patiess šillišalla, un nākošais pa labi stāvošais šillišalla arī ir teicis patiesību, tātad ir patiess.
Kas ir nākošais pa labi stāvošais šillišalla?

$m\ p\ p\ ?$

Tieši trešdaļa no pa kreisi esošajiem šillišallām ir meļi. Tātad ? izsacītais apgalvojums ir meli. Tātad ? ir melis:

$mppm$

Tagad viegli pārbaudīt, ka abi tālākie šillišallas ir teikuši patiesību, tātad ir patiesi:

$(mpp)(mpp)$

Pierādīsim, ka arī tālāk seko grupas (mpp). Tiešām, padomāsim, kas notiek, ja ir jau izveidotas n grupas mpp:

$$\underbrace{mppmppmpp...mpp}_{n\ reizes\ "mpp"}xyz$$

No x pa kreisi stāv $3n$ šillišallas, no kuriem tieši n ir meļi. Tātad **tieši trešdaļa** no tiem, kas stāv pa kreisi no x, ir meļi. Tātad x ir samelojies, tātad ir melis:

$$\underbrace{mppmppmpp...mpp}_{n\ reizes\ "mpp"}\ m\,yz$$

No y pa kreisi stāv $3n+1$ šillišallas, no kuriem $n+1$ ir melis. Tā kā $\frac{n+1}{3n+1} > \frac{n+1}{3n+3} = \frac{1}{3}$, tad y ir teicis patiesību, tātad ir patiess šillišalla:

$$\underbrace{mppmppmpp...mpp}_{n\ reizes\ "mpp"}\ mp\,z$$

No z pa kreisi stāv $3n+2$ rūķīši, no kuriem $n + 1$ ir melis. Tā kā $\frac{n+1}{3n+2} > \frac{n+1}{3n+3} = \frac{1}{3}$, tad z ir teicis patiesību, tātad ir patiess ir rūķītis:

$\underbrace{mpp\,mpp\,mpp \ldots mpp}_{n\ \text{reizes "}mpp\text{"}}\ mpp$

Esam ieguvuši, ka aiz sākotnējām grupām „*mpp*” atkal seko vēl viena grupa „*mpp*”. Līdzīgi aiz tās atkal seko grupa „*mpp*”, utt. Tā kā $2007:3=669$, tad skaidrs, ka rindā ir tieši 669 meļi.

7. Sadalīsim visus naturālos skaitļus no 1 līdz 40 pāros:

1 un 40
2 un 39
3 un 38
...
19 un 22
20 un 21

Katrā pārī ir viens pāra un viens nepāra skaitlis, un katrā pārī iekļauto skaitļu summa ir 41. Mums tātad jānoskaidro, vai skaitļus p_1, p_2, ... , p_{10} (pāra skaitļus) un n_1, n_2, ... , n_{10} (nepāra skaitļus) varēja izvēlēties tā, lai nekādi divi no tiem nebūtu vienā pārī.

Pieņemsim, ka izdevies to izdarīt.

Apskatīsim skaitļus $41-n_1$, $41-n_2$, ... , $41-n_{10}$. Tie visi ir pāra skaitļi (ja no nepāra skaitļa atņem nepāra skaitli, iegūst pāra skaitli), pie tam dažādi (jo visi skaitļi n_1, n_2, ... , n_{10} ir dažādi). Lai nekādu divu izvēlēto skaitļu summa nebūtu 41, neviens no šiem 10 pāra skaitļiem nedrīkst būt vienāds ne ar vienu no 10 pāra skaitļiem p_1, p_2, ... , p_{10} (tiešām, ja $41-n_i = p_j$, tad $n_i + p_j = 41$).

Tātad 41 – n_1, 41 – n_2, ... , 41 – n_{10}, p_1, p_2, ... , p_{10} ir 20 dažādi pāra skaitļi. Tā kā no 1 līdz 40 vispār ir tikai 20 pāra skaitļi, tad viens no skaitļiem 41 – n_1, 41 – n_2, ... , 41 – n_{10}, p_1, p_2, ... , p_{10} ir 2, otrs ir 4, trešais ir 6, ... , divdesmitais ir 40. Tāpēc to summa

$(41-n_1)+(41-n_2)+\ldots+(41-n_{10})+p_1+p_2+\ldots+p_{10}$ ir $2+4+6+\ldots+38+40$ jeb

$$41\cdot 10-(n_1+n_2+\ldots+n_{10})+(p_1+p_2+\ldots+p_{10})=420 \qquad (*)$$

(pārbaudiet paši, ka visu pāra skaitļu summa no 2 līdz 40 ieskaitot ir 420).

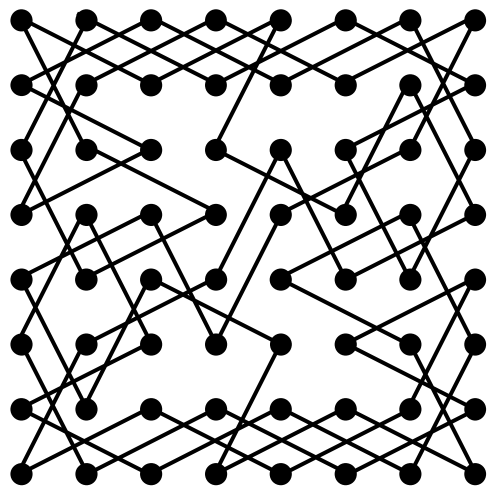
Bet saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem $n_1+n_2+\ldots+n_{10} = p_1+p_2+\ldots+p_{10}$, tāpēc (*) pārveidojas par vienādību $410=420$, kas, protams, nav pareiza. Tātad iegūta pretruna; tātad mūsu pieņēmums ir nepareizs, un, izvēloties skaitļus uzdevuma nosacījumos minētajā veidā, noteikti atradīsies tādi divi izvēlēti skaitļi, kuru summa ir 41.

8. Atbildi: 12 neizšķirtas spēles.

Vispirms parādīsim, ka 12 neizšķirtas spēles var būt. Sadalīsim visus spēlētājus 2 grupās: grupā *A* iekļausim 4 spēlētājus, grupā *B* – 3 spēlētājus. Pieņemsim, ka neizšķirti beidzas visas tās spēles, kurās spēlē kāds *A* spēlētājs pret kādu *B* spēlētāju, un nekādas citas. Tad neizšķirtu pavisam ir $4\cdot 3=12$. No jebkuriem trim spēlētājiem *X*, *Y* un *Z* **vismaz divi** ir no vienas grupas (vai nu abi no *A*, vai abi no *B*), un viņi savā starpā nav spēlējuši neizšķirti. Tāpēc uzdevuma nosacījumi ir izpildīti.

Tagad pierādīsim, ka vairāk par 12 neizšķirtām spēlēm nevar būt. Pieņemsim, ka to **ir vairāk par 12**, tātad vismaz 13, un *AB* ir spēle, kas beigusies neizšķirti (*A* un *B* – spēlētāji). Tad saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem katrs no 5 pārējiem spēlētājiem var būt spēlējis neizšķirti ar augstākais **vienu** no *A* un *B*; tātad ar *A* vai *B* līdzdalību ir notikušas augstākais $5+1=6$ neizšķirtas spēles. Apskatām 5 pārējos spēlētājus; to starpā ir bijušas vismaz $13-6=7$ neizšķirtas spēles. Ja *CD* ir viena no tām (*C* un *D* – spēlētāji), tad līdzīgi iegūstam: šo 5 spēlētāju grupas ietvaros ir ne vairāk kā $3+1=4$ neizšķirtas spēles ar C vai D līdzdalību. Tātad starp trim pārējiem spēlētājiem E, F, G notikušas vismaz $7-4=3$ neizšķirtas spēles – pretruna, jo tad iznāk, ka viņi visi trīs savā starpā spēlējuši neizšķirti. Tātad mūsu pieņēmums par vismaz 13 neizšķirtām spēlēm ir nepareizs.

9. Attēlojot šaha galdiņa lauciņus ar to centriem (pavisam ir $8\times 8=64$ punkti, kas izvietoti kvadrātiska režģa formā), 3.zīm. parādīts tāds **noslēgts** šaha zirdziņa maršruts, kas katrā rūtiņā ieiet tikai vienu reizi; apzīmēsim to ar *M*. **Uzdevumā minētais zirdziņš varbūt neizdara nevienu no tiem gājieniem, kas ietilpst maršrutā *M*.**



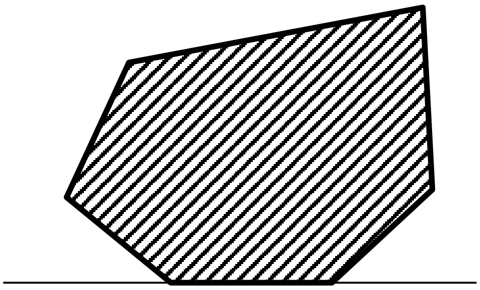
3.zīm

Maršrutā *M* **pamīšus** izvietotas 32 baltas un 32 melnas rūtiņas, un tas satur 64 zirdziņa gājienus. Padomāsim, kā maršrutā *M* var būt izvietotas neizgrieztās 32 rūtiņas. Ja kaut divas no tām maršrutā *M* seko viena otrai, tad tās arī ir meklējamās rūtiņas *A* un *B*. Lai nekādas divas no 32 neizgrieztajām rūtiņām maršrutā *M* nesekotu viena otrai, izgrieztai jābūt katrai otrajai maršruta *M* rūtiņai. Bet tad visām izgrieztajām rūtiņām jābūt vienā krāsā, kas nav iespējams, jo puse no izgrieztajām rūtiņām ir melna, puse – balta. Tātad kaut divas neizgrieztās rūtiņas maršrutā *M* seko viena otrai.

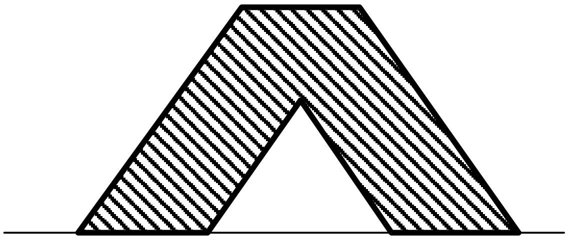
10. Vispirms atzīmēsim divas svarīgas izliektu daudzstūru īpašības.

I. Ja viena no izliekta daudzstūra malām atrodas uz taisnes *t*, tad nekādi citi daudzstūra punkti uz taisnes *t* neatrodas (skat. 4.zīm.).

Ja daudzstūris var būt ieliekts, šī īpašība nav spēkā (skat. 5.zīm.).



4. zīm.

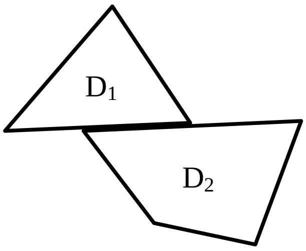


5. zīm.

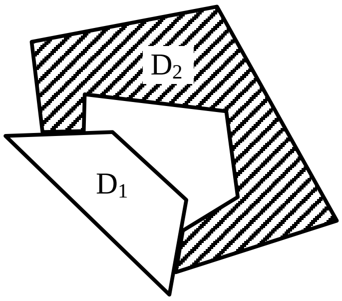
II. Teiksim, ka divi izliekti daudzstūri D_1 un D_2 saskaras pa malām a_1 un a_2, ja vienlaicīgi izpildās šādas īpašības:

1) D_1 un D_2 neklājas viens otram virsū,
2) viena no D_1 malām ir a_1,
3) viena no D_2 malām ir a_2,
4) malām a_1 un a_2 ir kopīgi **iekšējie** punkti (ne tikai virsotnes).

Katri divi izliekti daudzstūri var saskarties pa augstākais vienu malu pāri (skat. 6.zīm.).



6. zīm.



7. zīm.

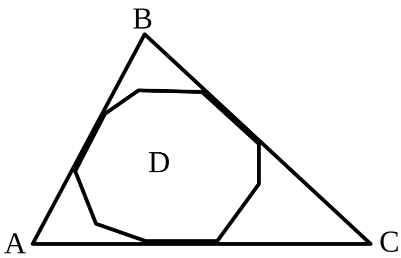
Ja kaut viens no daudzstūriem D_1 un D_2 var būt ieliekts, šī īpašība nav spēkā (skat. 7.zīm.).

Tagad ķersimies pie uzdevuma risinājuma.

Apskatīsim tos izliektos daudzstūrus, kuros sagriezts trijstūris ABC. Izvēlēsimies no šiem daudzstūriem tādu, kuram ir **visvairāk malu**; pieņemsim, ka tas ir daudzstūris D ar n malām. (Ja ir vairāki daudzstūri ar vislielāko malu skaitu, ņemam jebkuru no tiem.)

Kas var atrasties „blakus” daudzstūrim D aiz tā malām?

Pirmkārt, aiz dažām malām var „neatrasties nekas”; tās ir tās malas, kuras atrodas uz ΔABC malām. Tomēr tādu malu daudzstūrim D ir ne vairāk kā 3 – saskaņā ar īpašību I ne vairāk kā viena uz katras no ΔABC malām (skat. 8.zīm.).



8. zīm.

Aiz katras no citām D malām (šo citu malu ir **vismaz n – 3**) atrodas vismaz viens no izliektajiem daudzstūriem, kuros sagriezts ΔABC; turklāt saskaņā ar II īpašību aiz katras no šīm citām malām atrodas savs izliektais daudzstūris. Tātad bez D ir radušies vēl vismaz n – 3 citi izliekti daudzstūri. Katram no tiem ir vismaz 4 malas (jo neviens no tiem nav trijstūris saskaņā ar uzdevumā doto), un nevienam no tiem nav vairāk par *n* malām (jo n-stūris *D* ir ar vislielāko malu skaitu starp radušamies daļām). Ja kādam no šiem n – 3 daudzstūriem ir *n* malas, tad tam un *D* ir vienāds malu skaits. Pretējā gadījumā šiem n – 3 daudzstūriem malu skaits var būt tikai viens no skaitļiem 4; 5; 6; ... ; n – 2; n – 1 – pavisam n – 4 dažādas vērtības. Tā kā apskatāmo daudzstūru daudzums n – 3 ir lielāks par iespējamo malu skaitu daudzumu n – 4, tad nevar būt tā, ka visiem daudzstūriem malu skaiti ir dažādi. Tāpēc diviem no tiem malu skaiti ir vienādi, k.b.j.