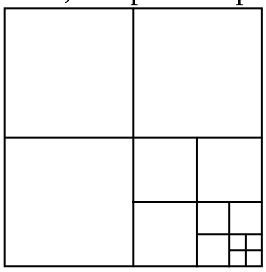
„Profesora Cipariņa kluba” 4. nodarbība 2007./2008. mācību gadā
Īsi uzdevumu atrisinājumi.

1. Apzīmēsim pulksteni, kurš iztek 6 minūtēs, ar *A*, bet otru – ar *B*. Sniegbaltīte vispirms „palaiž” abus pulksteņus. Brīdī, kad *A* iztecējis, pulkstenī *B* augšējā traukā vēl palikušas smiltis 2 minūtēm. Šai brīdī Sniegbaltīte sāk cept kūku un turpina vērot pulksteni *B*. Brīdī, kad no *B* augšējā trauka visas smiltis iztecējušas, viņa apgriež *B* otrādi. Brīdī, kad no *B* augšējā trauka atkal iztecējušas visas smiltis, viņa pārtrauc kūkas cepšanu. Kūka ir cepusies $2+8=10$ minūtes.

2. Atbilde: jā, var.
Risinājums. Sagriežam kvadrātu vispirms 4 vienādos kvadrātos, tad vienu no 4 iegūtajiem – atkal 4 vienādos kvadrātos, vienu no šiem 4 kvadrātiem – atkal 4 vienādos kvadrātos, utt. Skat. 1.zīm., kur parādīti pirmo 4 griešanu rezultāti.



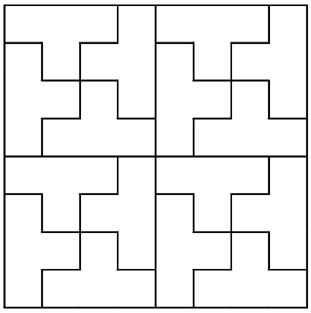
1.zīm.

Viegli saprast, ka, turpinot griešanu šādā veidā, vismazākā izmēra kvadrātu ir 4, bet visu citu izmēru kvadrāti – pa 3. Ievērojam, ka $2008=4+2004=4+668\cdot 3$. Tātad brīdī, kad būs izveidoti 668 triju vienādu kvadrātu komplekti (tas notiks pēc 669 griešanām), vajadzīgā situācija būs sasniegta.

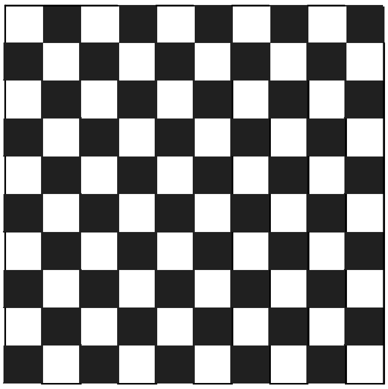
3. Atbilde atkarīga no tā, vai sākumā abās kaudzītēs ir vienādi konfekšu daudzumi vai nē.
A. Ja sākumā abās kaudzītēs ir vienādi konfekšu daudzumi, tad, pareizi spēlējot, Maija uzvar. Viņa visu laiku „atdarina” Andra gājienus: ja Andris ar savu gājienu apēd kaut kādu daudzumu konfekšu no vienas kaudzītes, tad Maija ar savu sekojošo gājienu apēd tikpat konfekšu no otras kaudzītes, tādējādi **atkal atjaunojot konfekšu daudzumu vienādību kaudzītēs.** Skaidrs, ka tādā ceļā **Maijai gājienu nepietrūks:** tā kā kaudzītes ir vienādas, tad tikpat konfekšu, cik Andris apēd no vienas, Maija var apēst no otras. Tā kā spēlei tomēr kādreiz jābeidzas (nevar ēst konfektes bezgalīgi), tad gājienu pietrūks Andrim. Tāda situācija iestāsies brīdī, kad viņš pilnīgi iztukšos vienu kaudzīti; tad Maija ar savu gājienu nākošo pilnīgi iztukšos otru kaudzīti, un spēle būs beigusies.
B. Ja sākumā abās kaudzītēs ir atšķirīgi konfekšu daudzumi, tad, pareizi spēlējot, uzvar Andris. Ar savu pirmo gājienu viņš apēd no lielākās kaudzītes tik daudz konfekšu, lai abās kaudzītēs paliktu vienāds konfekšu daudzums, un tālāk spēlē „uz izlīdzināšanu” tāpat, kā Maija **A** gadījumā.

4. Atbilde: a) nevar, b) var, c) nevar.
Risinājums. a) kvadrātā ir 81 rūtiņa; 81 nedalās ar 4. Tāpēc kvadrāta rūtiņas nevar sadalīties pa figūriņām tā, lai katrā figūriņā būtu 4 rūtiņas.
b) skat. 2.zīm.
c) izkrāsosim kvadrāta rūtiņas šaha galdiņa kārtībā (skat.3.zīm.); ir 50 baltas un 50 melnas rūtiņas.

„Profesora Cipariņa kluba” 4. nodarbība 2007./2008. mācību gadā
Īsi uzdevumu atrisinājumi.



2. zīm.



3. zīm.

Pieņemsim pretējo tam, ko vēlamies pierādīt – pieņemsim, ka kvadrāts sagriezts uzdevumā minētajās figūriņās. Tā kā kvadrātā ir 100 rūtiņas, bet viena figūriņa satur 4 rūtiņas, tad figūriņu ir $100 : 4 = 25$. Ievērosim, ka katra figūriņa noteikti satur vai nu 1, vai 3 baltas rūtiņas, lai kurā vietā tā arī būtu izgriezta. Gan 1, gan 3 ir nepāra skaitļi. Bet 25 nepāra skaitļu summa ir nepāra skaitlis, tātad tā nevar būt 50. Esam ieguvuši pretrunu, jo visās 25 figūriņās kopā ir tieši 50 baltas rūtiņas. Tas parāda, ka mūsu pieņēmums par sagriešanas iespējamību ir nepareizs.

5. Uzrakstām reizinātājus citā kārtībā:
$R = (2\cdot 5)\cdot 10\cdot (4\cdot 15)\cdot 20\cdot (8\cdot 25)\cdot Q$, kur ar Q apzīmēts visu to reizinātāju reizinājums, kas nav uzrakstīti atsevišķi. Acīmredzot, Q ir vesels skaitlis, kas nebeidzas ne ar 0, ne ar 5 (jo Q nesatur nevienu reizinātāju, kas dalītos ar 5), un $R = 10\cdot 10\cdot 60\cdot 20\cdot 200\cdot Q = 24000000\cdot Q = (24\cdot Q)\cdot 1000000$. Skaitlis $24\cdot Q$ ir pāra skaitlis, kas nebeidzas ar 0; tātad tā pēdējais cipars ir **nenulles pāra cipars**. Šis cipars ir tas, par kuru runā uzdevumā.

6. Viegli pārbaudīt, ka pastāv identitāte
$a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+ac+bc)$.
Pielietojot to uzdevumā minētajiem skaitļiem a, b un c, iegūstam, ka $a^2 + b^2 + c^2 = 0$.
Atceramies, ka katra skaitļa kvadrāts ir vai nu pozitīvs, vai 0. Tāpēc vienādība $a^2 + b^2 + c^2 = 0$ pastāv tad un tikai tad, ja $a^2 = b^2 = c^2 = 0$, t.i., tad un tikai tad, ja $a = b = c = 0$. No tā seko, ka $a^3 + b^3 + c^3 = 0$, k.b.j.

7. Kā zināms no absolūtās vērtības (moduļa) definīcijas, jebkurai izteiksmei vai skaitlim A ir spēkā sakarība

$$|A| = \begin{cases} A, \ ja\ A \geq 0, \\ -A, \ ja\ A < 0. \end{cases}$$

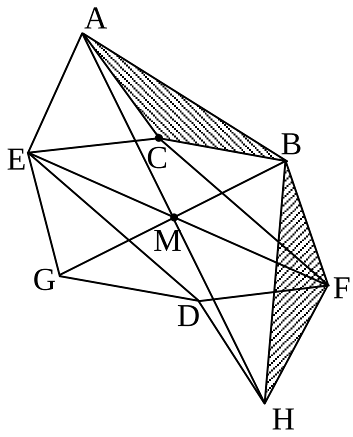
Tāpēc dotais vienādojums (uzrakstīsim to saīsinātā formā kā $|f(x)| + |g(x)| = |h(x)|$ pārveidojas par vienu no 8 vienādojumiem atkarībā no tā, vai $f(x)$, $g(x)$ un $h(x)$ ir negatīvi vai nav:

Nr.	$f(x)$	$g(x)$	$h(x)$	Iegūtais vienādojums
1.	≥ 0	≥ 0	≥ 0	$f(x)+g(x)=h(x)$
2.	≥ 0	≥ 0	<0	$f(x)+g(x)=-h(x)$
3.	≥ 0	<0	≥ 0	$f(x)-g(x)=h(x)$
4.	≥ 0	<0	<0	$f(x)-g(x)=-h(x)$
5.	<0	≥ 0	≥ 0	$-f(x)+g(x)=h(x)$
6.	<0	≥ 0	<0	$-f(x)+g(x)=-h(x)$
7.	<0	<0	≥ 0	$-f(x)-g(x)=h(x)$
8.	<0	<0	<0	$-f(x)-g(x)=-h(x)$

Viegli saprast, ka katrs pēdējā kolonnā iegūtais vienādojums ir kvadrātvienādojums (visi 3 saskaitāmie x^2 nevar saīsināties, jo to ir nepāra skaits), tāpēc tam nav vairāk par divām saknēm (kuras pie tam der par **dotā** vienādojuma atrisinājumiem tikai tad, ja apmierina tos nosacījumus par $f(x)$, $g(x)$ un $h(x)$, pie kuriem atbilstošais pēdējās kolonnas vienādojums iegūts). Bez tam viegli saskatīt, ka 1. un 8. vienādojums ir līdzvērtīgi (ekvivalenti), tāpēc tiem ir vienas un tās pašas saknes. Tāpat ekvivalenti ir 2. un 7., 3. un 6., 4. un 5. vienādojumi. Tātad mums ir ne vairāk par 4 dažādiem kvadrātvienādojumiem, kam kopā nav vairāk par 8 dažādām saknēm, kuras pie tam visas varbūt nemaz nav sākumā dotā vienādojuma saknes. Tāpēc uzdevumā dotajam vienādojumam **nav vairāk par 8 dažādām saknēm**.
Jau šāda rezultāta iegūšana skolēnam būtu ievērojams sasniegums. Tomēr uzdevums vēl nav atrisināts: mēs neesam noskaidrojuši, vai 8 dažādas saknes tiešām **var** būt? Izrādās, ka uzrakstīt šo, otro risinājuma daļu skolēnam saprotamā valodā ir krietni grūtāk, nekā profesors Cipariņš bija iedomājies, un viņš to vēl nav paspējis izdarīt (lūdzu, piedodiet!). Atrisinājuma atlikušo daļu publicēsim nedaudz vēlāk.

8. Uzdevuma apgalvojums ir nepareizs (šī kļūda ir ielaista apzināti, lai mudinātu jūs akli neuzticēties grāmatās, laikrakstos, žurnālos u.tml. rakstītajam, bet censties visu pašiem kritiski pārbaudīt). Uzrādīsim minētā tipa virkni, kurā visi locekļi ir pirmskaitļi (t.i., tajā nav neviena skaitļa, kas nebūtu pirmskaitlis):
pirmais virknes loceklis ir 2;
otrais virknes loceklis ir 3;
katrs nākošais loceklis ir pirmā locekļa un otrā locekļa summa, t.i. $2+3=5$.
Tātad šī virkne ir 2; 3; 5; 5; 5;... , t.i., sastāv tikai no pirmskaitļiem.
Komentārs. Ja uzdevuma formulējumā pievieno nosacījumu, ka virkne ir augoša, uzdevuma apgalvojums ir pareizs. Pamēģiniet pierādīt to patstāvīgi.

9. Saskaņā ar uzdevumā doto ΔEAC ir vienādmalu, bet ΔCBF ir vienādsānu ar virsotnes leņķi $\angle CBF=120°$. Papildinām zīmējumu simetriski attiecībā pret punktu M (skat. 4.zīm.); tad M ir četrstūra $ECFD$ diagonāļu EF un CD krustpunkts un vienlaicīgi viduspunkts, tāpēc $ECFD$ ir paralelograms.



4.zīm.

Pieņemsim uz brīdi, ka $\Delta ACB = \Delta HFB$ (1).

Simetrijas pēc $\Delta HFB = \Delta AEG$ un $\Delta ACB = \Delta HDG$. No četru trijstūru vienādībām seko *AB* = *HB*, *HB* = *AG* un *AB* = *HG*. Tātad četrstūrī *ABHG* visas malas ir vienādas; tātad tas ir rombs; tātad tā diagonāles ir savstarpēji perpendikulāras; tātad $\angle AMB = 90°$, k.b.j.

Tātad mums atliek pierādīt (1). Atceramies, ka *ECFD* ir paralelograms, tāpēc $\angle DFC = 180° - \angle ECF$.

Simetrijas pēc *AC* = *HD* = *HF*; tā kā ΔCBF ir vienādsānu, tad $CB = FB$. Atliek pierādīt, ka $\angle ACB = \angle HFB$. Bet $\angle ACB = 360° - \angle ACE - \angle BCF - \angle ECF =$ $= 360° - 60° - 30° - \angle ECF$ = $\mathbf{270° - \angle ECF}$,

un arī $\angle HFB = \angle HFD + \angle DFC + \angle CFB = 60° + (180° - \angle ECF) + 30° =$ = $\mathbf{270° - \angle ECF}$. Vajadzīgais pierādīts.

10. Vispirms ievērosim, ka $11 \times 11 = 11 \times (1+10) = 11 + 11 \times 10$. Tāpēc 11×11 var aprēķināt šādi (pēc skolā mācītā saskaitīšanas paņēmiena):

	1	1
1	1	0
1	2	1

5.zīm.

Tālāk $(11 \times 11) \times 11 = (11 \times 11) \times (1+10) = 11 \times 11 + 11 \times 11 \times 10$, un to pēc skolā mācītā saskaitīšanas paņēmiena var aprēķināt kā

	1	2	1
1	2	1	0
1	3	3	1

6.zīm.

Līdzīgi turpinot (skat. 7.zīm.), 39.rindiņā iegūsim vajadzīgo rezultātu

				1	1	
			1	1	0	
			1	2	1	3.rinda
		1	2	1	0	
		1	3	3	1	5.rinda
	1	3	3	1	0	
	1	4	6	4	1	7.rinda
1	4	6	4	1	0	
1	6	1	0	5	1	9.rinda

•••

7.zīm.

Lai risinājums būtu pilnīgs, jāpamato, kāpēc rezultātā nav vairāk par 30 cipariem (mūsu lapas platums ir 30 rūtiņas) jeb, ka $11^{20} < 10^{30}$ (10^{30} ir pirmais naturālais skaitlis, kam ir vairāk par 30 cipariem).

No 7.zīm. redzams, ka $11^5 < 200000$. Tāpēc

$11^{20} = 11^5 \cdot 11^5 \cdot 11^5 \cdot 11^5 < 200000 \cdot 200000 \cdot 200000 \cdot 200000 =$

$= 16 \cdot 10^{20} < 100 \cdot 10^{20} = 10^{22} < 10^{30}$.

Piezīme. Šī uzdevuma autors ir Latvijas Universitātes students Raitis Ozols.