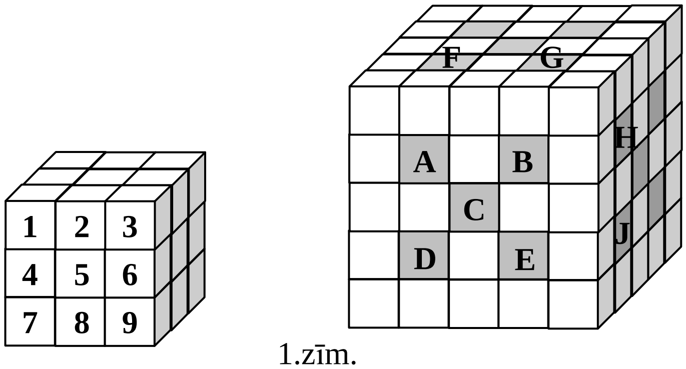
„Profesora Cipariņa kluba” 5. nodarbība 2007./2008. mācību gadā
Īsi uzdevumu atrisinājumi.

1. Sākotnēji uz Andra lapas ir 35 robežas starp melniem un baltiem apgabaliem. Beigās, kad visa lapa būs balta, šādu robežu vairs nebūs. Tātad robežu skaitu jāsamazina no 35 uz 0. Vienu joslu nokrāsojot, robežu skaits samazinās ne vairāk kā par 2 (vienā un otrā pusē no šīs joslas). Tā kā $35 > 17 \cdot 2$, tad ar 17 krāsošanām visu lapu baltu padarīt nevar, un nepieciešamas vismaz 18 krāsošanas. Skaidrs, ka ar 18 krāsošanām mērķi var sasniegt: nokrāsojam pa vienai baltas visas 18 sākotnēji melnās joslas.

2. Atbilde: ir 57 melni kubiņi.
Risinājums. Kubā ārējā slānī ir 30 melni kubiņi – pa 5 katrā no skaldnēm (neviens melnais kubiņš nav redzams vienlaicīgi vairāk kā vienā kuba skaldnē). Noņemsim šos ārējos kubiņus. Pāri paliek kubs, kas sastāv no $3 \times 3 \times 3$ mazajiem kubiņiem.
Pamatosim, ka visi šie kubiņi ir melni. Skaidrs, ka centrālais kubiņš ir melns. Apskatīsim palikušā kuba priekšējo skaldni un katram tās kubiņam norādīsim tādu sākotnējā kuba rindu, „kuras dēļ” šis kubiņš ir melns:



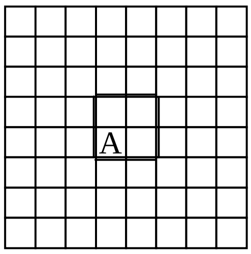
1.zīm.

1 – A; 2 – H; 3 – B; 4 – F; 5 – C; 6 – G; 7 – D; 8 – J; 9 – E (ir arī citi „vaininieki”).
Tā kā mūsu krāsojums ir „vienāds”, raugoties no visām pusēm, tad arī pārējās kuba skaldnes visas ir melnas. Tāpēc visi $3 \times 3 \times 3 = 27$ palikušie kubiņi ir melni.
Tātad melno kubiņu pavisam ir $30 + 27 = 57$.

3. Atbilde: a) nevar, b) var.
Risinājums. Summā $S = 1 + 2 + 3 + ... + 24 + 25$ ir 12 pāra saskaitāmie un 13 nepāra saskaitāmie. Tāpēc S ir nepāra skaitlis. Ja katrā rindā ierakstīto skaitļu summa būtu pāra skaitlis, tad S būtu izsakāma kā piecu pāra skaitļu summa (pirmās rindas summa + otrās rindas summa + ... + piektās rindas summa). Tā ir pretruna.
Situāciju, kurā visas apskatāmās summas ir nepāra skaitļi, skat. 2. zīm. Ar krustiņiem apzīmētajās rūtiņās ierakstīti nepāra skaitļi, pārējās – pāra skaitļi.

x				
x				
x	x	x		
x	x	x		
x	x	x	x	x

2.zīm.



3.zīm.

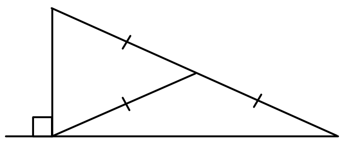
4. Atbilde: uzvar Andris
Risinājums. Andra stratēģija var būt, piemēram, šāda. Ar savu pirmo gājienu viņš ieraksta „A”, kā parādīts 3. zīm. Ievērosim, ka turpmāk Maija nedrīkst rakstīt „M”

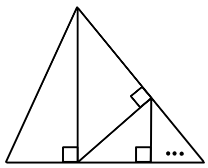
nevienā no izceltā 2×2 rūtiņas lielā kvadrāta rūtiņām. Ja Maija ar savu kārtējo gājienu ieraksta „M” kādā rūtiņā x, tad Andris ar savu atbildes gājienu ieraksta „A” rūtiņā y, kas ir simetriska rūtiņai x attiecībā pret kvadrāta centru. Šādi spēlējot, burti A un M (izņemot pirmo burtu A) izvietojas simetriski; tāpēc, ja rūtiņa x ir pieejama Maijai, tad rūtiņa y ir pieejama Andrim. Tāpēc Andrim gājienu nepietrūks: uz katru Maijas gājienu viņam ir atbildes gājiens. Tā kā kādam tomēr gājienu pietrūks, tad to pietrūks Maijai, un Andris uzvarēs.

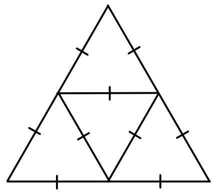
5. Atbilde: nē, nevar.

Risinājums: Visos izrakstītajos skaitļos kopā ir 21 cipars „pieci”: 11 reizes kā vienu cipars un 10 reizes kā desmitu cipars. Ja abi iegūtie garie skaitļi būtu vienādi, tajos būtu vienādi piecinieku daudzumi, bet tad piecinieku pavisam būtu pāra skaits – pretruna.
Iespējami daudzi atrisinājumi, kas balstās uz citām idejām.

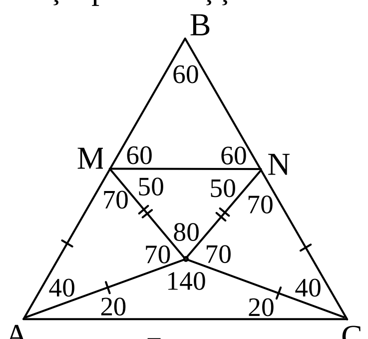
6. Atceramies, ka taisnleņķa trijstūrī mediāna pret hipotenūzu vienāda ar pusi no hipotenūzas (4. zīm.) Tātad taisnleņķa trijstūri var sagriezt 2 vienādsānu trijstūros.


4.zīm.


5.zīm.


6.zīm.

Tā kā **katru** trijstūri var sagriezt 2; 3; 4;... taisnleņķa trijstūros (skat. 5. zīm.), tad **katru** trijstūri var sagriezt 4; 6; 8;... vienādsānu trijstūros.
Novelkot vienādmalu trijstūrī viduslīnijas, tas sadalās 4 vienādmalu trijstūros (skat. 6. zīm.) Atstājot 3 no tiem nedalītus, bet ceturto dalot 4; 6; 8;... vienādsānu trijstūros, kā aprakstīts augstāk, iegūstam sākotnējā trijstūra sadalījumu 7; 9; 11;... vienādsānu trijstūros.
Atliek parādīt, kā sadalīt vienādmalu trijstūri piecos vienādsānu trijstūros. Viena no iespējām redzama 7. zīm.; skaitļi apzīmē leņķu lielumus grādos.



7.zīm.

Konstrukcijas gaita: vispirms iegūst punktu X ΔABC iekšpusē tā, ka $\angle XAC = \angle XCA = 20°$, pēc tam M un N tā, ka *AM*=*AX*=*CX*=*CN*.

7. Atbilde: a)jā, b)nē.

Risinājums. Viegli pārbaudīt, ka skaitlis $\overline{ab144} = \overline{ab000} + 144 = \overline{ab} \cdot 1000 + 144 =$
$= 8(\overline{ab} \cdot 125 + 18)$ dalās ar 8 pie **jebkuriem** cipariem a un b.

Ievērosim, ka $4 = 3 + 1$ un $7 = 2 \cdot 3 + 1$. Tāpēc, ja skaitļa $\overline{abcde}$ cipari drīkst būt vienīgi 1; 4; 7, tad tā ciparu summa sastāv no 5 vieniniekiem un (varbūt) dažiem trijniekiem. Tātad tā nedalās ar 3. Tātad tā nedalās arī ar 9. Bet tad pats skaitlis $\overline{abcde}$ arī nedalās ar 9.

8. Atbilde: 12 dienas.

Risinājums: Tas, ka 12 dienās prasīto var sasniegt, redzams sekojošā tabulā

Datums	Dim	Rub	Smar	Top	Sat	Amet	Hriz
1.	7	6	5	4	3	2	1
2.	8	9	7	6	5	4	3
3.	9	11	10	8	7	6	5
4.	10	12	13	11	9	8	7
5.	11	13	15	14	12	10	9
6.	12	14	16	17	15	13	11
7.	13	15	17	19	18	16	14
8.	15	16	18	20	21	19	17
9.	17	18	19	21	23	22	20
10.	19	20	21	22	24	25	23
11.	21	22	23	24	25	27	26
12.	23	24	25	26	27	28	29

Katrā datumā apvilkts tas dārgakmeņu daudzums, kas šajā datumā ir vislielākais. Viegli pārbaudīt, ka visi uzdevuma nosacījumi ir izpildīti.

Tagad parādīsim, ka ar mazāk kā 12 dienām nepietiek. Sauksim dienu, kurā kāds no dārgakmeņiem **pirmo reizi** Sniegbaltītei ir vislielākajā skaitā, par **īpašu** šim dārgakmenim. Skaidrs, ka 1. janvāris ir īpaša diena kādam dārgakmenim. Ir vēl 6 citas īpašas dienas; sauksim tās parādīšanās secībā par 2., 3., 4., 5., 6., 7. īpašo dienu.

Pierādīsim, ka 2. un 3. īpašā diena, 3. un 4. īpašā diena, ... , 6. un 7. īpašā diena nevar kalendārā atrasties blakus. Tad uzdevums būs atrisināts: apskatāmajā laika posmā jābūt 7 īpašajām dienām un vēl vismaz 5 „atdalītājdienām” pirms 3., 4., 5., 6., 7. īpašās dienas. Tātad kopā jābūt vismaz 7+5=12 dienām.

Atliek pierādīt izcelto apgalvojumu.

Pieņemsim, ka dienā „X” divi lielākie dārgakmeņu daudzumi ir $a>b$ un attiecīgie dārgakmeņi ir A un B. Tā kā dārgakmeņu daudzumi ir naturāli skaitļi, tad $b \leq a-1$, bet pārējo dārgakmeņu ir ne vairāk kā a – 2 katrs. Dienā „X+1” dārgakmeņu A ir vismaz a + 1, dārgakmeņu B ir b + 1, b + 2 vai b + 3, bet citu dārgakmeņu ir ne vairāk kā $(a-2)+3=a+1$ katrs.

Tātad diena „X+1” nav īpaša dārgakmenim A (jo tā nav pirmā diena, kad dārgakmeņu A ir visvairāk) un nav īpaša nevienam citam dārgakmenim bez A un B (jo to nav vairāk kā A katrs).

Tātad diena „X+1”var būt īpaša tikai dārgakmenim B, kurš pirms tam dienā „X” bija „otrajā vietā”; savukārt iepriekšējais „līderis” A dienā „X+1” atrodas otrajā vietā.

Aplūkosim n-to īpašo dienu, $n \geq 3$; apzīmēsim to ar „Y+1”, bet iepriekšējo kalendāra dienu – ar „Y”. Pieņemsim, ka „Y” arī ir īpašā diena; tā kā $n \geq 3$, tad „Y” ir vismaz otrā īpašā diena, tāpēc eksistē kalendāra diena tieši pirms „Y”.

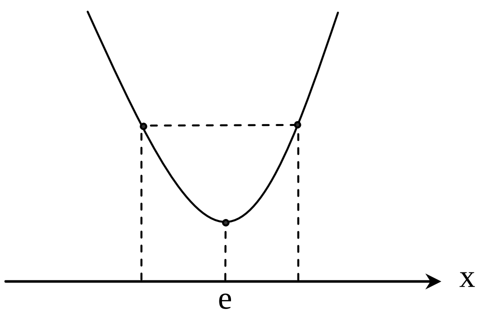
Apzīmēsim to ar „Y-1”.

Pieņemsim, ka diena „Y+1” ir īpaša diena dārgakmenim B, bet diena „Y” – dārgakmenim A. Saskaņā ar iepriekš pierādīto dienā „Y” dārgakmeņu B skaits bija otrais lielākais, bet dienā „Y-1” dārgakmeņu A skaits bija otrais lielākais un

dārgakmeņu B skaits – lielākais. Tā ir pretruna, jo tad diena „Y+1” nav **pirmā** diena, kurā dārgakmeņu B skaits ir vislielākais. Tāpēc mūsu pieņēmums par to, ka dienas „Y” un „Y+1” abas ir īpašas, ir nepareizs.
Piezīme. Šādu pretrunu nevar iegūt no pieņēmuma, ka 1. un 2. īpašā diena atrodas blakus; šai gadījumā diena „Y-1” var vispār neeksistēt.

9. Viegli pārbaudīt, ka $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)$.
Viens no ceļiem, kā iegūt minēto sadalījumu, izmanto kubu summas formulu $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ un summas kuba formulu $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.
Pakāpeniski iegūstam $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y)^3-3x^2y-3xy^2+z^3-3xyz=$
$=(x+y)^3+z^3-3xy(x+y+z)=$
$=((x+y)+z)((x+y)^2-(x+y)z+z^2)-3xy(x+y+z)=$
$=(x+y+z)(x^2+2xy+y^2-xz-yz+z^2-3xy)=$
$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)$, k.b.j.

10. Funkcijas *f(x)* grafiks novietojas šādi (nav svarīgi, vai tas krusto vai nekrusto Ox asi un kur atrodas Oy ass):



Funkcijas mazākā vērtība atbilst kaut kādai argumenta x vērtībai $x=e$. Pie $x\le e$ funkcija *f(x)* dilst, pie $x\ge e$ - aug. Turklāt grafiks ir simetrisks attiecībā pret taisni $x=e$. Tāpēc no nosacījuma *f(a)=f(b)* seko, ka viens no skaitļiem a un b atrodas pa kreisi no e (vai sakrīt ar e), bet otrs – pa labi no e (vai sakrīt ar e), turklāt $|a-e|=|b-e|$. Tāpēc uz skaitļu ass e atrodas „tieši vidū” starp a un b; tāpēc $\frac{a+b}{2}=e$. Tā kā $a+b=c+d$, tad no šejienes seko, ka $\frac{c+d}{2}=e$, t.i., e atrodas „tieši vidū” starp c un d. No šī fakta un augšminētās simetrijas arī seko, ka *f(c)=f(d)*, k.b.j.
Iespējami arī citi risinājumi, piemēram, pakāpeniski algebriski pārveidojumi, kas sākas ar vienādību $a^2+pa+q=b^2+pb+q$.