„Profesora Cipariņa kluba” 6. nodarbība 2007./2008. mācību gadā

Īsi uzdevumu atrisinājumi.

1. Tāds ir, piemēram, skaitlis 10004728. Tiešām,

$$\begin{array}{r} 1\ 0\ 0\ 0\ 4\ 7\ 2\ 8 \\ +\ \ 1\ 0\ 0\ 4\ 7\ 2\ 8\ 0 \\ \hline 2\ 0\ 0\ 5\ 2\ 0\ 0\ 8 \end{array}.$$

2. Ievērosim, ka brīžos, kad mēs spirāles kārtējā rūtiņā ierakstām nepāra skaitļu kvadrātus (t.i., $1=1^2, 9=3^2, 25=5^2$ utt.), aizpildītās rūtiņas veido ģeometrisku figūru – kvadrātu, un mēs attiecīgā nepāra skaitļa kvadrātu ierakstām apakšējā labajā stūra rūtiņā (skat. 1.zīm.).

1

5	4	3
6	1	2
7	8	9

17	16	15	14	13
18	5	4	3	12
19	6	1	2	11
20	7	8	9	10
21	22	23	24	25

37	36	35	34	33	32	31
38	17	16	15	14	13	30
39	18	5	4	3	12	29
40	19	6	1	2	11	28
41	20	7	8	9	10	27
42	21	22	23	24	25	26
43	44	45	46	47	48	49

utt.

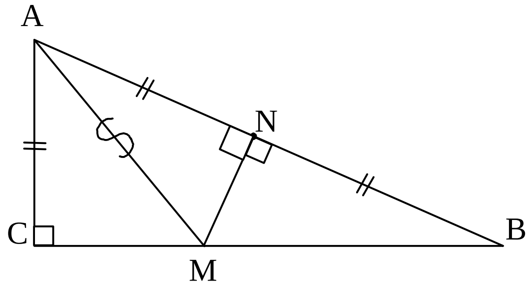
1.zīm.

Tas arī saprotams, jo katrs nākošais spirāles pilnais gredzens pievieno aizpildītajam kvadrātam vienu rūtiņu joslu gar katru malu, t.i., palielina tā malas garumu (rūtiņās) par 2. Ievērosim, ka $43^2=1849<2008<2025=45^2$. Skaitlis $45^2=2025$ tiek uzrakstīts tā spirāles gredzena labajā apakšējā stūrī, kura mala satur 45 rūtiņas. Naturālo skaitļu rindā 44 tieši pirms 2025 esošie naturālie skaitļi (t.i., skaitļi $2025-1, 2025-2, \ldots, 2025-44$) tiek ierakstīti šī spirāles gredzena apakšējā horizontālajā posmā. Tā kā arī skaitlis $2008=2025-17$ ir viens no tiem, tad tas arī tiek ierakstīts šajā posmā.

Skaitļu virknē $3^2; 5^2; 7^2; \ldots; 45^2$ skaitlis $45^2=2025$ ir $\left(\frac{45-3}{2}+1\right)$-ais jeb 22-ais.

Tātad tas ir nobīdīts 22 rūtiņas uz leju un 22 rūtiņas pa labi no skaitļa 1. Tā kā 2008 ir nobīdīts 17 rūtiņas pa kreisi no 2025, tad 2008 ir nobīdīts 22 rūtiņas uz leju un $22-17=5$ rūtiņas pa labi no skaitļa 1.

3. Atceramies skolā mācītu faktu: ja taisnleņķa trijstūrī viens šaurais leņķis ir $30°$ liels, tad šī leņķa pretkatetes garums ir puse no hipotenūzas garuma. Tāpēc $AN=BN=AC$. Tāpēc $\Delta ANM=\Delta ACM$ (kh); tāpēc $\angle CAM=\angle NAM=\frac{1}{2}\angle CAB=$ $=\frac{1}{2}\cdot 60°=30°=\angle NBM$. Tāpēc

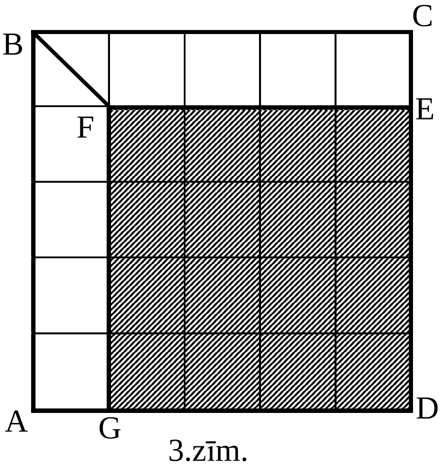


2.zīm.

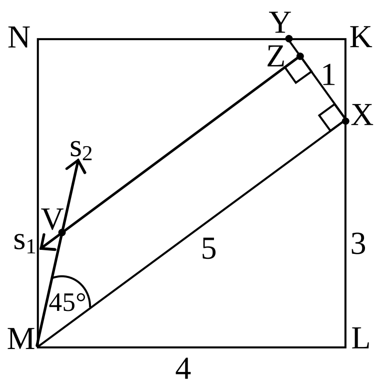
$\Delta ACM = \Delta BNM$ (lml). No tā seko, ka $CM = \frac{1}{2}AM = \frac{1}{2}BM$. No vienādības $CM = \frac{1}{2}BM = \frac{1}{2}(CB - CM)$ seko $1\frac{1}{2}CM = \frac{1}{2}CB$ un $CM = \frac{1}{3}CB$. Tā kā $NM = CM$, vajadzīgais pierādīts.

4. Saskaņā ar doto eksistē tāds naturāls skaitlis n, ka $xy + 2y + 4 = 7n$; tātad $\boldsymbol{4 = 7n - xy - 2y}$. Tāpēc y nedalās ar 7 (ja y dalītos ar 7, tad izceltajā vienādībā visi locekļi labajā pusē dalītos ar 7, tāpēc arī 4 dalītos ar 7 – pretruna). Identisku pārveidojumu ceļā iegūstam, ka $y(zx + 2x + 4) = xyz + 2xy + 4y = z(\boldsymbol{xy + 2y + 4})$ - $2(\boldsymbol{yz + 2z + 4}) + 2(\boldsymbol{xy + 2y + 4})$. Saskaņā ar uzdevumā doto trīs izceltās iekavas dalās ar 7. Tāpēc arī $y(zx + 2x + 4)$ dalās ar 7. Tā kā y nedalās ar 7 un 7 – pirmskaitlis, tad $zx + 2x + 4$ dalās ar 7, k.b.j.

5. a) jā, var. Vienu kvadrātu ar izmēriem 4×4 novietojam, kā parādīts 3.zīm. Atliek parādīt, ka katru no četrstūriem $ABFG$ un $BCEF$ var pārklāt ar kvadrātu ar izmēriem 4×4. Šie četrstūri ir vienādi. Parādīsim, ka vienu no tiem var ievietot kvadrātā ar izmēriem 4×4. Tad uzdevums būs atrisināts.



3.zīm.



4.zīm.

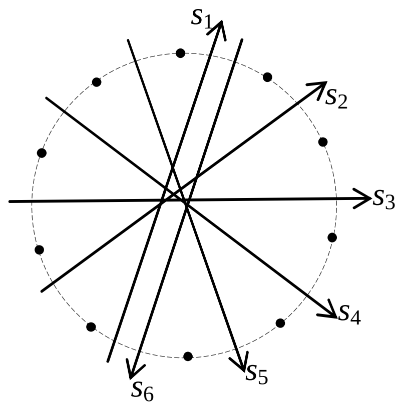
Pieņemsim, ka $MNKL$ – kvadrāts ar malas garumu 4 (skat. 4.zīm.). Atliekam punktu X uz malas LK tā, ka $LX = 3$; tad $XK = 4 - 3 = 1$ un pēc Pitagora teorēmas $MX^2 = ML^2 + LX^2 = 4^2 + 3^2 = 25$, tātad $MX = 5$. Novelkam $XY \perp MX$. Tā kā taisnleņķa trijstūrī XKY hipotenūza garāka par kateti, tad $XY > XK = 1$. Tāpēc, atliekot uz stara XY tādu punktu Z, ka $XZ = 1$, šis punkts Z atradīsies kvadrāta $MNKL$ iekšpusē. Velkam caur Z staru s_1 paralēli MX. Skaidrs, ka $\angle LMX < \angle LMK = 45°$, tāpēc $\angle NMX > 45°$. Velkam staru s_2 ar sākumpunktu M tā, lai tas veidotu $45°$ leņķi ar MX. Saskaņā ar augstāk pierādīto šis stars sākotnēji ies kvadrāta $MNKL$ iekšpusē. Apzīmēsim s_1 un s_2 krustpunktu ar V. Saskaņā ar konstrukciju četrstūri $BCEF$ un $MXZV$ vienādi savā starpā, un otrais no tiem ir pārklāts ar 4×4 kvadrātu $MNKL$. Līdz ar to uzdevums atrisināts.

b) nē, nevar. Viegli saprast, ka viens kvadrāts ar izmēriem 4×4 nevar pārklāt divas virsotnes kvadrātam ar izmēriem 5×5, ja abu kvadrātu malas ir paralēlas / perpendikulāras. Tāpēc katrai 5×5 kvadrāta virsotnei vajadzīgs cits pārklājošais kvadrāts; tātad tos vajag vismaz četrus.

6. Viegli pārbaudīt, ka var ņemt, piemēram, $r=\left(\frac{31}{12}\right)^2=\frac{961}{144}$. Tiešām, tad
$r+5=\frac{961}{144}+5=\frac{961+720}{144}=\frac{1681}{144}=\left(\frac{41}{12}\right)^2$ un
$r+10=\frac{961}{144}+10=\frac{961+1440}{144}=\frac{2401}{144}=\left(\frac{49}{12}\right)^2$. Kā šo risinājumu varēja izdomāt, pastāstīsim citreiz.

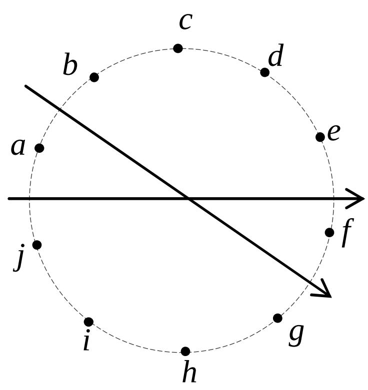
7. Nē, nevar.
Pierādīsim, ka no pirmās nevienādības seko $x^2+y^2<8\left(z^2+t^2\right)$. Tas būs pretrunā ar otro uzdevumā doto nevienādību.
Ceļot $x+y<2(z+t)$ abas puses kvadrātā, iegūstam $x^2+2xy+y^2<4\left(x^2+2xt+t^2\right)$, no kurienes seko $x^2+y^2<4\left(z^2+t^2\right)+8zt=$ $=4\left(z^2+t^2\right)+4\left[z^2+t^2-(z-t)^2\right]=8\left(z^2+t^2\right)-4(z-t)^2\le 8\left(z^2+t^2\right)$, k.b.j.

8. Pierādīsim, ka tādu taisni var novilkt tā, lai katrā pusē no tās būtu tieši 5 uzrakstītie skaitļi.



5.zīm.

Apskatīsim sešus starus; katrs no tiem atdala vienas 5 desmitstūra virsotnes no pārējām 5 (skat. 5.zīm.). Katram no šiem stariem s_i ar K_i apzīmēsim skaitļu summu tā kreisajā pusē, ar L_i – skaitļu summu tā labajā pusē. Ar S_i apzīmēsim starpību $S_i=K_i-L_i$, $i=1;2;3;4;5;6$. Mēs pierādīsim, ka kādam i lielums S_i pēc moduļa (absolūtās vērtības) nepārsniedz 90.
Ja kāda no starpībām $S_1;S_2;\ldots;S_6$ ir nulle, vajadzīgā taisne jau atrasta. Pieņemsim, ka tādas S_i nav un ka $\boldsymbol{S_1>0}$ (otrs gadījums ir analoģisks). Ievērosim, ka $K_1=L_6$ un $L_1=K_6$ (skatoties pretējos virzienos, kreisā un labā puse mainās vietām), tāpēc $S_6=-S_1$; tātad $\boldsymbol{S_6<0}$. Tāpēc starpību virknē $S_1;S_2;S_3;S_4;S_5;S_6$ jābūt divām tādām **blakus esošām** starpībām, no kurām pirmā ir pozitīva, bet otrā – negatīva. Aplūkosim šīs starpības.



6.zīm.

Ja

(*) $(a+b+c+d+e)-(f+g+h+i+j)>90$

un

(**) $(b+c+d+e+f)-(g+h+i+j+a)<-90$,

tad vispirms no (**) iegūstam

(***) $(g+h+i+j+a)-(b+c+d+e+f)>90$

un pēc tam, saskaitot (*) un (***), iegūstam

$2a-2f>180$ jeb $\boldsymbol{a-f>90}$.

Bet izceltā nevienādība nevar būt patiesa, jo lielākā iespējamā starpība starp naturāliem divciparu skaitļiem ir $99-10=89$. Tātad vajadzīgā pretruna iegūta un uzdevums atrisināts.

9. Atbilde: nē, nevar.

Risinājums. Pieņemsim, ka tas ir iespējams. Palūgsim, lai katrs skolēns A uzdāvina katram savam draugam tik konfekšu, cik kompaktdisku viņam (A) ir. Tā kā katrs skolēns dāvina 5 reizes vairāk konfekšu, nekā viņam ir kompaktdisku, tad kopējais uzdāvināto konfekšu skaits ir $5\cdot 2008=10\,040$. No otras puses, katri divi draugi kopā viens otram uzdāvina konfekšu daudzumu, kas dalās ar 3 (ja vienam ir x, bet otram – $2x$ kompaktdiski, tad viņu starpā tiek dāvinātas $3x$ konfektes). Tāpēc arī kopējam dāvināto konfekšu skaitam jādalās ar 3. Bet $10\,040$ ar 3 nedalās. Iegūta pretruna, tātad mūsu pieņēmums ir nepareizs.

10. Viegli pārliecināties, ka 5 var izteikt kā triju naturālo saskaitāmo summu tikai divos veidos: $3+1+1$ un $2+2+1$ (ja nerūpējamies par saskaitāmo kārtību). Ņemot vērtā arī to, kura no konfektēm pirmajā gadījumā dāvināta 3 eksemplāros un kura no konfektēm otrajā gadījumā – vienā eksemplārā, iegūstam 6 dažādas iespējas:

$3+1+1$	$1+3+1$	$1+1+3$
$2+2+1$	$2+1+2$	$1+2+2$

Tā kā rūķīšu ir vairāk nekā dažādo iespēju uzdāvināt konfektes (7 > 6), tad atradīsies tādi rūķīši, uz kuriem attiecas viena un tā pati no minētajām iespējām.