„Profesora Cipariņa kluba” 1. nodarbība 2008./2009. mācību gadā
Uzdevumu atrisinājumi.

1. Kartīti pirmajam ciparam var izvēlēties 9 veidos. Pēc tam, kad tas izdarīts, kartīti otrajam ciparam var izvēlēties 8 veidos (jāizvēlas citu kartīti nekā to, kas jau izmantota pirmajam ciparam). Tādā ceļā varam iegūt $9 \cdot 8 = 72$ skaitļus (visus divciparu skaitļus, kam cipari ir atšķirīgi no nulles un dažādi). Vēl var izveidot arī skaitļus 66 un 99, jo gan kartīti $\boxed{6}$, gan kartīti $\boxed{9}$ var novietot katru divās dažādās pozīcijās.

Tāpēc Andris var salikt $72 + 2 = 74$ skaitļus.

2. Nē, nevar. Ja tā gadītos, tad skolēnu skaits skolā nepārsniegtu $36 \cdot 29 = 1044 < 1045$ - pretruna ar doto.

3. Atbilde: a) nē, b) nē, c) jā.

Risinājums: a) ar katru gājienu tabulā ierakstīto skaitļu summa aug par 4. Sākumā tā ir 10, tātad visu laiku paliek pāra skaitlis. Ja vienlaicīgi visās rūtiņās būtu nepāra skaitļi, tad šī summa (deviņu nepāra skaitļu summa) būtu nepāra skaitlis – pretruna.
b) ar katru gājienu tieši viens no skaitļiem a, b, c, d palielinās par 1; ar katru gājienu par 1 palielinās arī skaitlis x (skat. 1. zīm.). Tāpēc gājienu izpildes rezultātā lielums $a + b + c + d - x$ nemainās. Sākumā tas ir $1 + 1 + 2 + 1 - 1 = 4$; beigās tam jābūt $8 + 9 + 11 + 10 - 36 = 2$. Tā kā $2 \neq 4$, minētā situācija nav iespējama.

a		b
	x	
d		c

1. zīm.

c) jāizdara 4 gājieni, kas „skar” skaitli a; 5 gājieni, kas „skar” skaitli b; 6 gājieni, kas „skar” skaitli c; 6 gājieni, kas „skar” skaitli d. Pārliecinieties patstāvīgi, ka vajadzīgais tiek iegūts.

4. Ērtības labad sauksim 1 vai 2 atšķirīgas konfektes (ja tādas ir) par viltotām, bet citas – par īstām. Līdz ar profesoru mēs varam rīkoties, piemēram, šādi.

Sadalīsim visas konfektes 4 daļās pa 502 konfektēm katrā. Apzīmēsim šīs daļas ar burtiem *A*, *B*, *C*, *D*.

Pirmajā svēršanā nosvērsim *A* un *B*. Vispirms pieņemsim, ka

$A = B$. Tas nozīmē, ka vai nu šajās daļās viltoto konfekšu nav vispār, vai arī katrā no tām atrodas pa vienai viltotai konfektei. Tāpēc otrajā svēršanā salīdzināsim *B* ar *C*.

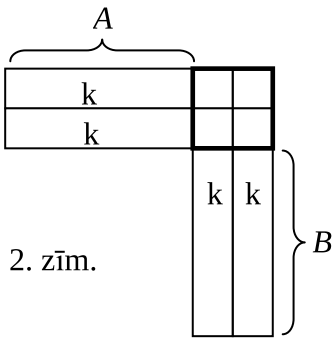
Ja $B = C$, tad kļūst skaidrs, ka grupās *A*, *B* un *C* viltoto konfekšu nav, un ar trešo svēršanu salīdzinām *C* ar *D*. Ja arī šoreiz svari nostājas līdzsvarā, tad tas nozīmē, ka viltoto konfekšu vispār nav. Ja svari nosveras, tad skaidrs, ka viltotās konfektes (vai konfekte) atrodas grupā *D* un tās (tā) ir smagākas (-a), ja kauss, uz kura atradās grupa *D*, nosvērās uz leju; pretējā gadījumā viltotās (-ā) konfektes (-e) ir vieglākas (-a) par pārējām.

Ja $B \neq C$, tad tas nozīmē, ka grupās *A* un *B* ir vai nu pa vienai viltotai konfektei katrā, vai arī grupā *C* ir vismaz viena viltota konfekte. Lai to noskaidrotu, sadalīsim grupu *A* uz pusēm un ar trešo svēršanu salīdzināsim abas šīs grupas *A* daļas savā starpā. Ja svari paliks līdzsvarā, tad tas nozīmēs, ka viltotā konfekte (vai arī viltotās konfektes) atrodas kopā *C*. Šīs konfektes tipu parāda tas, kādā virzienā otrajā svēršanas reizē pārvietojās kauss, uz kura tika uzliktas grupas *C* konfektes: ja tas nosvērās uz leju, tad viltotā konfekte ir smagāka par īsto konfekti, bet, ja otrās svēršanas laikā tas pacēlās uz augšu, tad viltotā konfekte ir vieglāka par īsto. Savukārt, ja trešās svēršanas rezultātā svari nesaglabā līdzsvara stāvokli, tad skaidrs, ka grupās *A* un *B* ir pa vienai viltotajai konfektei. Viltotās konfektes tipu šajā gadījumā noteiksim atkarībā no tā, kādā stāvoklī atradās svaru kauss ar grupas *B* konfektēm pēc otrās svēršanas: ja šis kauss nosvērās uz leju, tad viltotā konfekte ir smagāka par īsto, bet, ja pacēlās uz augšu, tad viltotā konfekte ir vieglāka par īsto konfekti.

Citi svēršanu rezultāti ir reducējami uz šiem diviem gadījumiem, tāpēc tos tuvāk neapskatīsim.

Ievērosim, ka mēs noskaidrojam vajadzīgo, pašas viltotās konfektes (ja tādas ir) neatrodot.

5. a) Acīmredzami katrā nākošajā „āķī”ir par 2 kvadrātiņiem vairāk nekā iepriekšējā (skat. 2. zīm):

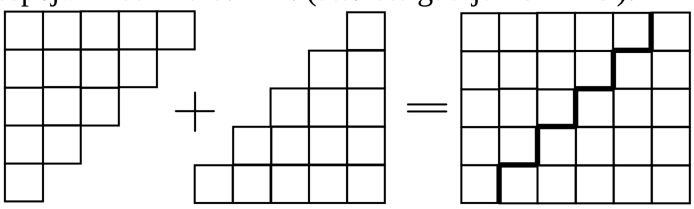


2. zīm.

rajonos *A* un *B* kvadrātiņu daudzumi abos „āķos” ir vienādi, bet izceltajā kvadrātā ārējā „āķī” ir par 2 kvadrātiņiem vairāk nekā iekšējā. Tāpēc „āķos” daudzumi ir secīgi nepāra skaitļi: $3;\ 3+2=5;\ 5+2=7$ utt.

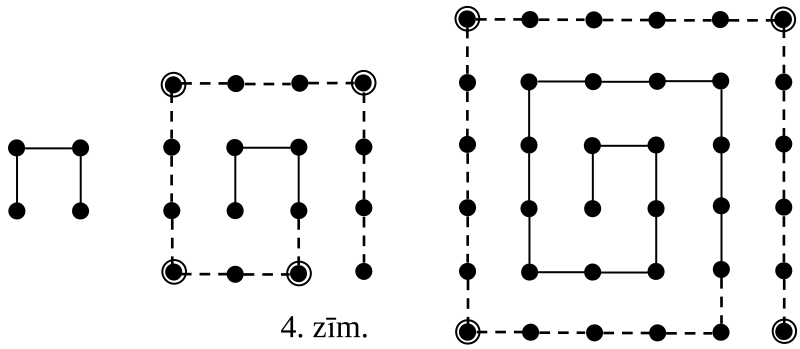
Kreisajā apakšējā stūrī esošais iesvītrotais kvadrātiņš un $(n-1)$ „āķi” kopā satur $1+3+5+7+...+(2\cdot n-1)$ kvadrātiņus. Tā kā tie kopā veido kvadrātu, kam gar katru malu ir *n* mazo kvadrātiņu malas, tad šo kvadrātiņu skaits ir $n\times n=n^2$, k.b.j.

b) viena no iespējām redzma 3. zīm. (attēlots gadījums $n=5$):


3. zīm.

6. Līnija skar katru punktu tieši vienu reizi (ieskaitot sākuma un beigu punktus). Pavisam ir 10 000 punktu. Līnjā ir 10 000 – 1 = 9999 vienu vienību gari posmi: no 1. punkta uz 2. punktu, no 2. punkta un 3. punktu, ..., no 9999. punkta uz 10 000. punktu. Tātad līnijas garums ir 9999.

Apskatīsim pētāmā tipa lauztās līnijas kvadrātiem, kas satur 2×2, 4×4, 6×6 utt. punktus (skat. 4. zīm.)

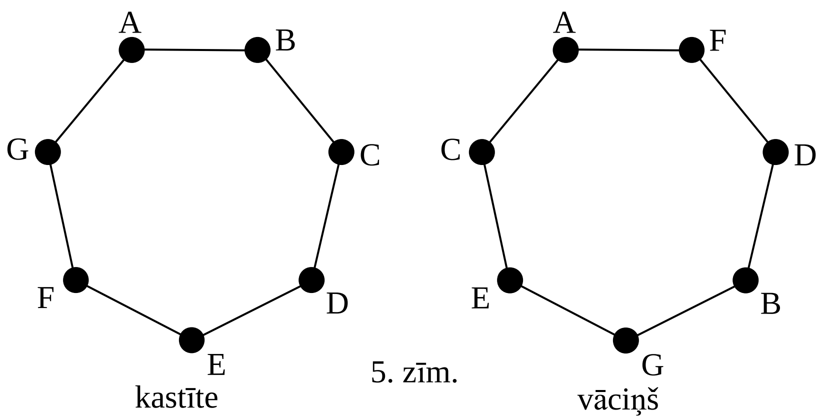


4. zīm.

Kā redzma, katrā nākošajā kvadrātā līnijai ir par 4 stūriem vairāk nekā iepriekšējā (4. zīm. tie apvilkti).

Kvadrātu virknē $2\times2 \rightarrow 4\times4 \rightarrow 6\times6 \rightarrow 8\times8 \rightarrow ... \rightarrow 98\times98 \rightarrow 100\times100$ ir pavisam 49 pārejas no viena kvadrāta uz nākošo. Tā kā pirmajai lauztajai līnijai ir 2 stūri, tad pēdējai ir $2+49\cdot4=198$ stūri.

7. Skat., piem., 5. zīm. Krāsas apzīmētas ar burtiem.



5. zīm.

8. Tā kā $\overline{bca}$ dalās ar 9, tad ciparu summa $b+c+a$ dalās ar 9. Tāpēc skaitļa $\overline{cab}$ ciparu summa $c+a+b$ dalās ar 9; tātad skaitlis $\overline{cab}$ dalās ar 9. Skaitlis $\overline{cab}$ dalās gan ar 9, gan ar 11. Tā kā skaitļiem 9 un 11 vienīgais kopīgais naturālais dalītājs ir 1, tad secinām: $\overline{cab}$ dalās ar $9\cdot11=99$. Apskatām visas iespējas:

$\overline{cab}$	$\overline{abc}$
$99\cdot2=198$	981
$99\cdot3=297$	972
$99\cdot4=396$	963
$99\cdot5=495$	954
$99\cdot6=594$	945
$99\cdot7=693$	936
$99\cdot8=792$	927
$99\cdot9=891$	918

Citu iespēju nav, jo $\overline{cab}$ ir trīsciparu skaitlis. Viegli pārbaudīt, ka no iespējamām $\overline{abc}$ vērtībām tikai 945 dalās ar 7. **Tātad *a* = 9; *b* = 4; *c* = 5.**

9. Apskatām visus pirmskaitļus, **ar kuriem** dalās kaut viens no skaitļiem n^2+1, $n=1;2;3;...$. Piemēram, šādi pirmskaitļi ir $1^2+1=\mathbf{2}$; $2^2+1=\mathbf{5}$; $4^2+1=\mathbf{17}$; tā kā $5^2+1=\mathbf{26}$, kas dalās ar 13, tad šāds pirmskaitlis ir arī **13**, utt. Pierādīsim, ka šādu pirmskaitļu ir bezgalīgi daudz. Tad noteikti starp tiem ir arī tādi, kas lielāki par $1\ 000\ 000$.

Pieņemsim pretējo tam, kas jāpierāda, t.i., pieņemsim, ka šādu pirmskaitļu ir pavisam *k*. Apzīmēsim tos ar $p_1; p_2; ...; p_{k-1}; p_k$. Izveidosim to reizinājumu un apzīmēsim to ar *m*; tātad $m = p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_k$. Skaidrs, ka *m* ir naturāls skaitlis. Apskatām skaitli m^2+1. Tā kā $m^2+1>1$, tad tas dalās ar kādu pirmskaitli.Saskaņā ar to, kā tika izvēlēti skaitļi $p_1; p_2; ...; p_k$, skaitlis m^2+1 dalās ar kādu no šiem skaitļiem. Tātad $(p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_k)^2+1$ dalās ar kādu no skaitļiem $p_1; p_2; ...; p_k$.

Bet tas nav iespējams: pirmais saskaitāmais dalās ar jebkuru no $p_1; ...; p_k$, bet otrais – vieninieks – nedalās ne ar vienu no tiem, tātad 1 paliek atlikumā. Iegūta pretruna. Tātad mūsu pieņēmums ir nepareizs, un mūs interesējošo pirmskaitļu ir bezgalīgi daudz.

10. Tā kā jūsu vēstules ar pašu sastādītajiem uzdevumiem turpina pienākt, pārskatu par tiem dosim citreiz.