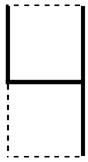
„Profesora Cipariņa kluba” 2. nodarbība 2008./2009. mācību gadā
Uzdevumu atrisinājumi.

1. Var nodzēst **a)** trīs augšējos nogriežņus, **b)** trīs apakšējos nogriežņus, **c)** trīs nogriežņus, atstājot ciparu „4” (skat. 1.zīm.). Skaitlis „4” ir „divi kvadrātā”: $4 = 2 \times 2$. Šādus skaitļus matemātikā sauc par kvadrātiem (dažreiz – par pilniem kvadrātiem).


1.zīm.

2. Atbilde: ar 6 griezieniem.
Risinājums.
A. Ar 6 griezieniem mērķi var sasniegt, piemēram, šādi. Vispirms ar 3 griezieniem sadalām kubu astoņos kubos, kuru izmēri ir $2\times2\times2$ katram (daļas pat nav jāpārkārto). Pēc tam saliekam šos kubus vienu virs otra tā, ka izveidojas „tornis” ar izmēriem $2\times2\times16$, un ar diviem griezieniem sagriežam to četros „torņos”, kam izmēri ir $1\times1\times16$ un kas katrs sastāv no 8 atsevišķiem gabaliņiem, kuru izmēri ir $1\times1\times2$. Saliekam šos gabaliņus vienu otram blakus tā, ka tie veido „plāksnīti” ar izmēriem $2\times1\times32$, un ar sesto griezienu sasniedzam vajadzīgo.
Piezīme: iespējami arī citi paņēmieni.
B. Pierādīsim, ka ar 5 vai mazāk griezieniem nepietiek. No sākuma ir viens nesagriezts kubs. Katrs griezziens sadala katru iepriekš nesagrieztu daļu ne vairāk kā divās. Tāpēc pēc 1. grieziena nav vairāk par $1\times2=2$ daļām, pēc 2. grieziena – par $2\times2=4$ daļām, pēc 3. grieziena –par $4\times2=8$ daļām, pēc 4.grieziena –par $8\times2=16$ daļām; pēc 5.grieziena nav vairāk par $16\times2=32$ daļām. Tā kā beigās jāiegūst 64 daļas, tad ar 5 vai mazāk griezieniem nepietiek.

3. Atbilde: nē, nevar.
Risinājums: Atceramies: ar 3 dalās **visi tie** un **tikai tie** naturālie skaitļi, kam ciparu summa dalās ar 3. Tā kā A ciparu summa ir 7 un 7 nedalās ar 3, tad A nedalās ar 3. Tad arī skaitlis $7\cdot A$ nedalās ar 3. Bet, ja $7\cdot A$ ciparu summa būtu 24, tad tas dalītos ar 3, jo 24 dalās ar 3. Tāpēc $7\cdot A$ ciparu summa nevar būt 24.

4. Sadalām $\{1;2;...;2008\}$ grupās G_0, G_1, ..., G_7 atkarībā no tā, kādu atlikumu dod skaitļi, dalot ar 8. Pieņemsim pretējo tam, kas jāpierāda. Tad no dotajiem 756 skaitļiem ne vairāk kā viens ir grupā G_0 un ne vairāk kā viens ir grupā G_4. Tāpēc grupās G_1, G_2, G_3, G_5, G_6, G_7 kopā ir vismaz 754 dotie skaitļi. Tā kā $754 = 3\cdot251+1$, tad vai nu G_1 un G_7, vai G_2 un G_6, vai G_3 un G_5 kopā satur vismaz 252 dotos skaitļus. Tā kā katrā grupā G_i ir tieši 251 skaitlis, tad attiecīgajā pārī abas grupas satur vismaz pa vienam dotajam skaitlim. Bet tad abu šo skaitļu summa dalās ar 8 – pretruna ar pieņēmumu.

5. Atbilde: 321.
Risinājums.
A. Ja $a=b=10$ un $c=11$, tad $a+b+c=31$ un $a^2+b^2+c^2=10^2+10^2+11^2=100+100+121=321$.
B. Pierādīsim, ka mazāku summu par 321 iegūt nevar.
Neviens no apskatāmajiem trim naturālajiem skaitļiem nevar būt mazāks par 1 vai lielāks par 31. Tātad katram no tiem ir tikai galīgs skaits iespējamu vērtību. Tāpēc

arī pašu apskatāmo skaitļu trijnieku ir tikai galīgs skaits. Tātad starp tiem noteikti **ir** viens (vai vairāki) tādi, kuram (vai kuriem) skaitļu kvadrātu summa ir vismazākā. Apzīmēsim vienu no šādiem trijniekiem ar $(x;\ y;\ z)$, pie tam varam uzskatīt, ka

$$x \le y \le z \qquad (1)$$

Pierādīsim, ka $x \le 10$. Tiešām, ja būtu $x > 10$, tad $x \ge 11$; bet tad $x + y + z \ge 11 + 11 + 11 = 33 > 31$ - pretruna ar uzdevumā doto.
Līdzīgi pierāda, ka $\mathbf{z \ge 11}$.
Pierādīsim, ka $z - x \le 1$. Tiešām, pieņemsim no pretējā, ka $z - x > 1$. Parādīsim, ka tādā gadījumā naturālu skaitļu trijniekam $(x+1;\ y;\ z-1)$ kvadrātu summa būtu mazāka nekā trijniekam $(x;\ y;\ z)$. Tiešām, mums jāpārbauda nevienādība

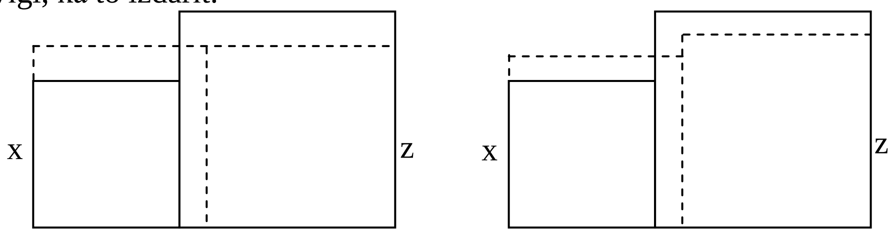
$$(x+1)^2 + y^2 + (z-1)^2 < x^2 + y^2 + z^2 \qquad (2)$$

Ekvivalenti pārveidojot, pakāpeniski iegūstam

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 + z^2 - 2z + 1 < x^2 + y^2 + z^2$$

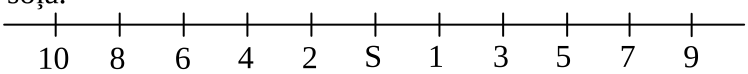
$$2 < 2(z - x),$$

kas saskaņā ar mūsu pieņēmumu ir patiesība. Iznāk, ka skaitļu trijnieka $(x;\ y;\ z)$ kvadrātu summa **nav** mazākā iespējamā; tā ir pretruna ar to, kā šo trijnieku izvēlējāmies. Tātad mūsu pieņēmums par to, ka $z - x > 1$, ir nepareizs, un tiešām $z - x \le 1$.
No $x \le 10$, $z \ge 11$ un $z - x \le 1$ seko, ka $x = 10$ un $z = 11$. No šejienes $y = 31 - x - z = 10$. Tātad mazākā kvadrātu summa tiešām tiek iegūta, ja divi no apskatāmajiem skaitļiem ir 10, bet trešais no tiem ir 11.
Piezīme. Nevienādību (2) var pierādīt arī citādi, piem., no 2.zīm. Izdomājiet patstāvīgi, kā to izdarīt.



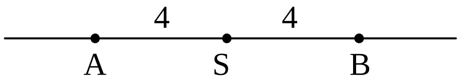
2.zīm.

6. Atbilde: a) var, **b)** nevar.
Risinājums. a) skat.3.zīm, kur ar skaitļiem atzīmētas Cipariņa atrašanās vietas pēc 1., 2., ..., 10. soļa.



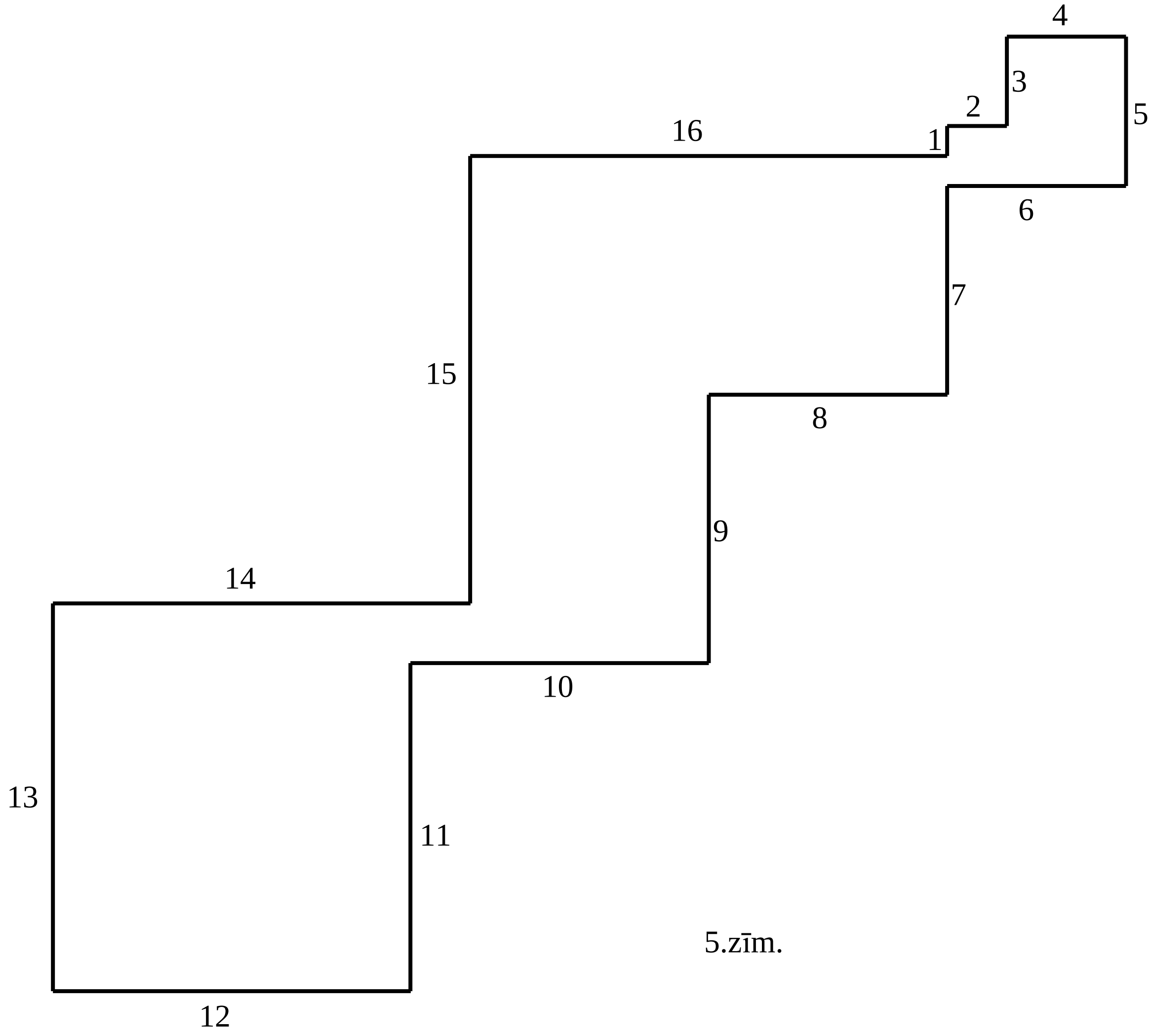
3.zīm.

b) pieņemsim, ka Cipariņš to var izdarīt. Atzīmēsim ar *A* un *B* tādus skaitļus ass punktus, ka $AS = SB = 4$ (skat. 4.zīm.).



4.zīm.

Tad attālums starp *A* un *B* ir 8 un Cipariņš pēc 9.soļa atrodas kādā no nogriežņa *AB* punktiem. Cipariņa kārtējā soļa garums ir 10; tas ir lielāks par *AB* garumu, tāpēc ar 10.soli Cipariņš noteikti izies ārpus *AB*, tāpēc nonāks no *S* tālāk nekā attālumā 4.
7. Jā, var. Skat., piem., 5.zīm.



5.zīm.

8. Attēlosim spēlētājus ar krāsainiem punktiem: vienas klases spēlētājus – ar sarkaniem, otras klases – ar ziliem, trešās klases – ar dzelteniem. Izvēlēsimies šos punktus tā, lai nekādi trīs no tiem neatrastos uz vienas taisnes. (To var panākt, piemēram, izvēloties tos visus uz vienas riņķa līnijas.) Ja divi spēlētāji savā starpā spēlējuši, novilksim starp atbilstošajiem punktiem taisnes nogriezni.

Tā kā katrs spēlētājs no vienas klases var spēlēt ar katru spēlētāju no pārējām klasēm, tad starp pirmās un otrās klases spēlētājiem var notikt $5 \times 5 = 25$ spēles; līdzīgi spriežam par spēlēm starp pirmo un trešo, kā arī otro un trešo klasi. Tātad pavisam varētu notikt 75 spēles, tātad varētu novilkt 75 taisnes nogriežņus. Novilkts 51 nogrieznis, tātad nenovilkti palikuši 24 nogriežņi.

Pieņemsim pretējo tam, kas jāpierāda: pieņemsim, ka uzdevumā minētos *A*, *B*, *C* atrast nevar. Tas nozīmē: lai kā arī paņemtu trīs dažādu krāsu punktus *A*, *B*, *C*, vismaz viens no nogriežņiem *AB*, *BC* un *CA* nav novilkts. Teiksim, ka šis nenovilktais nogrieznis **sabojā trijstūri *ABC***.

Ievērosim, ka katrs nenovilkts nogrieznis *XY* sabojā 5 trijstūrus, proti, visus trijstūrus *XYZ*, kur *Z* – jebkura no „trešās krāsas” virsotnēm, t.i., tās krāsas virsotnēm, kurā nav ne *X*, ne *Y*. Tātad, pat ja katrs no 24 nenovilktajiem nogriežņiem sabojātu citus piecus trijstūrus, kopā tie sabojātu ne vairāk par $24 \cdot 5 = 120$ trijstūriem. Bet pavisam ir $5 \cdot 5 \cdot 5$ trijstūri *ABC*, jo gan *A*, gan *B*, gan *C* var izvēlēties piecos veidos (katru no citas krāsas punktu grupas). Tātad kopējais trijstūru skaits ir 125, un $125 > 120$. Tāpēc ir tādi trijstūri, kas nav sabojāti. Katrs šāds trijstūris dod mums vajadzīgos trīs spēlētājus. Iegūta pretruna ar pieņēmumu, ka tādus spēlētājus nevar atrast. Tātad pieņēmums ir bijis nepareizs, un tādus spēlētājus atrast var. Tas arī bija jāpierāda.

9. Katrīna var izvēlēties, piemēram, $a = 100$, $b = 10$ un $c = 1$. Tad Maijas aprēķinātā summa $a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z$ būs trīsciparu skaitlis, kurā Maijas iedomātie viencipara skaitļi *x*, *y* un *z* parādīsies kā cipari. Skaidrs, ka, uzzinot šo trīsciparu skaitli no Maijas, Katrīna uzreiz redzēs Maijas iedomātos skaitļus.

Piemērs. Ja Maijas iedomājusies $x = 2$, $y = 7$ un $z = 1$, tad viņai jāpaziņo Katrīnai skaitlis $100 \cdot 2 + 10 \cdot 7 + 1 \cdot 1 = 200 + 70 + 1 = 271$, un Katrīna, dzirdot to, uzreiz saprot, ka Maijas iedomātie skaitļi ir 2; 7; 1.

10. Piemēram, tā, kā parādīts 6.zīm.

A2	D4	B1	C3
B3	C1	A4	D2
C4	B2	D3	A1
D1	A3	C2	B4

6.zīm.