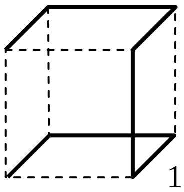
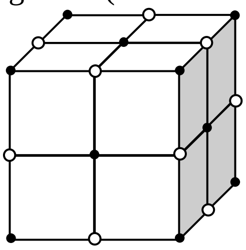
„Profesora Cipariņa kluba” 3. nodarbība 2008./2009. mācību gadā
Uzdevumu atrisinājumi.

1. Ja naturāls skaitlis n nebeidzas ar ciparu 9, tad skaitļa $n+1$ ciparu summa ir par 1 lielāka nekā n ciparu summa (skaitlim $n+1$ pēdējais cipars ir par 1 lielāks nekā skaitlim n, bet pārējie cipari, ja tādi ir, abiem skaitļiem sakrīt).
Tā kā vai nu n, vai $n+1$ noteikti nebeidzas ar ciparu 9, tad vai nu n un $n+1$ ciparu summas, vai arī $n+1$ un $n+2$ ciparu summas atšķiras viena no otras par 1. Tāpēc tās abas nevar dalīties ar 11. Tātad nav 3 viens otram sekojošu naturālu skaitļu, kam visiem ciparu summas dalītos ar 11.
Divus šādus skaitļus var atrast daudzos veidos. Kā piemērs der 28099999 un 28100000.

2. Kuba virsotnes prasītajā veidā apstaigāt var (skat.1.zīm.).


1.zīm.


2.zīm.

Kuba virsotnes un skaldņu centrus prasītajā veidā apstaigāt nevar. Nokrāsosim virsotnes un skaldņu centrus melnus, bet šķautņu viduspunktus – zaļus. Tad pavisam kopā ir $8+6=14$ melni punkti un 12 zaļi punkti. Staigājot tikai pa šķautnēm un „krustiem”, no melna punkta nonāk zaļā un no zaļa – melnā. Tā kā melnie un zaļie punkti maršrutā parādās pamīšus, tad to daudzumi maršrutā nevar atšķirties viens no otra vairāk kā par 1. Bet $14-12=2>1$. Tātad prasītais maršruts nav iespējams.

3. Viegli pārbaudīt, ka $35^2=1225$; $335^2=112225$; $3335^2=11122225$; $33335^2=1111222225$. Pamatojoties uz šiem piemēriem, rodas doma, ka katram naturālam n

$$\left(\underbrace{333...3}_{n}5\right)^2=\underbrace{11...1}_{n}\underbrace{22...2}_{n+1}5.$$

Pierādīsim to.

Ievērosim, ka $\underbrace{333...3}_{n}5=\underbrace{333...3}_{n}\cdot 10+5=\frac{1}{3}\cdot\underbrace{99...9}_{n}\cdot 10+5=\frac{10}{3}\cdot\left(10^n-1\right)+5=$

$=\frac{1}{3}\left(10^{n+1}+5\right).$

Ceļot šo skaitli kvadrātā, iegūstam

$$\frac{1}{9}\left(10^{2n+2}+2\cdot 10^{n+1}\cdot 5+25\right)=\frac{1}{9}\left(10^{2n+2}+10^{n+2}+25\right)=\frac{1}{9}\left(10^{2n+2}-1\right)+\frac{1}{9}\left(10^{n+2}-1\right)+3=$$

$=\underbrace{111...1}_{2n+2}+\underbrace{1...1}_{n+2}+3=\underbrace{11...1}_{n}\underbrace{22...2}_{n+1}5$, k.b.j.

Tātad ar cipariem 1; 2; 5 var pierakstīt bezgalīgi daudzu naturālu skaitļu kvadrātus.

4. Pieņemsim, ka Katrīna iedomājās naturālu skaitli n un tā dalītāju d; tad $n=k\cdot d$, k – kaut kāds naturāls skaitlis. Uzdevuma nosacījumus var pierakstīt ar vienādību $k\cdot d-5(d+10)=1$,
ko var pārveidot par $d(k-5)=51$.

No šejienes redzam, ka d ir skaitļa 51 dalītājs. Tātad pastāv viena no 4 iespējām:

- $d=1$; tad $k-5=51$, $k=56$ un $n=56\cdot 1=56$;
- $d=3$; tad $k-5=17$, $k=22$ un $n=22\cdot 3=66$;
- $d=17$; tad $k-5=3$, $k=8$ un $n=8\cdot 17=136$;
- $d=51$; tad $k-5=1$, $k=6$ un $n=6\cdot 51=306$

Tātad Katrīnas iedomātais skaitlis ir 56; 66; 136 vai 306.

5. Atbilde: nē nevar.

Risinājums. Pieņemsim no pretējā, ka tādi cipari a, b, c pastāv. Iegūstam vienādību $(10a+b)(10b+c)(10c+a)=(10c+b)(10b+a)(10a+c)$.

Atverot iekavas, iegūstam

$1001abc+100\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)+10\left(a^2c+c^2b+b^2a\right)=$

$=1001abc+100\left(a^2c+c^2b+b^2a\right)+10\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)$,

no kurienes seko

$90\left(a^2b+b^2c+c^2a-a^2c-c^2b-b^2a\right)=0$ jeb

$90(b-a)(c-b)(a-c)=0$

Skaidrs, ka šāda vienādība dažādiem a, b, c nevar pastāvēt, tāpēc mūsu pieņēmums ir nepareizs.

6. No $3n+1$ līdz $4n$ ieskaitot ir n naturāli skaitļi. Tā kā $n>1$, tad šo skaitļu ir vismaz divi. Viens no tiem ir $4n$; pārējie (tādu ir vismaz viens) ir mazāki par $4n$.

Skaitļa $4n$ apgrieztais lielums ir $\frac{1}{4n}$; pārējo skaitļu apgrieztie lielumi ir **lielāki** par $\frac{1}{4n}$. Tā kā tiek saskaitīti n skaitļi, no kuriem viens ir $\frac{1}{4n}$, bet pārēji (vismaz viens) ir lielāki par $\frac{1}{4n}$, tad summa ir **lielāka** par $n\cdot\frac{1}{4n}=\frac{1}{4}$, k.b.j.

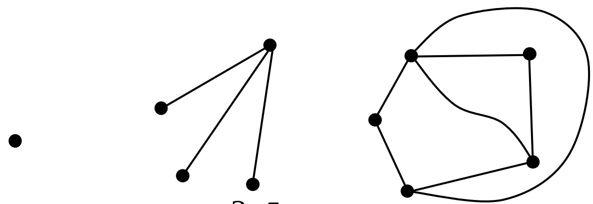
7. Viegli pārliecināties, ka katra Andra izmērītā nogriežņa a garums ir lielāks par visu to izmērīto nogriežņu garumu summu, kuri ir īsāki par a: $1<2$, $1+2<4$, $1+2+4<8$ utt. Tāpēc nekādi Andra izmērītie nogriežņi neveido noslēgtu maršrutu: tā būtu pretruna ar teorēmu par lauztas līnijas garumu.

Tāpēc astoņiem Andra izmērītajiem nogriežņiem kopā ir vismaz 9 galapunkti, un kopējais atzīmēto punktu skaits nav mazāks par 9. Deviņi atzīmēti punkti var būt, piemēram, skaitļu ass punkti 1; 2; 4; 8; 16; 32; 64; 128; 256. Tiešām, $2-1=1$; $4-2=2$; $8-4=4$; $16-8=8$; $32-16=16$; $64-32=32$; $128-64=64$; $256-128=128$.

Pamatosim augstāk izcelto apgalvojumu. Pierādīsim visā matemātikā svarīgu rezultātu.

Lemma par ciklu. *Ja pavisam ir n punkti, $n\geq 2$, un novilktas vismaz n līnijas, katra no kurām savieno divus no šiem punktiem, tad var atrast dažas līnijas, kuras veido noslēgtu gredzenu.*

Pieņemsim no pretējā, ka šāda noslēgta gredzena nav. Apskatāmā punktu un līniju sistēma var sastāvēt no viena vai vairākiem fragmentiem; vienā fragmentā iekļausim punktus, no kuriem var aiziet no katra uz katru pa apskatāmajām līnijām, un šos punktus savienojošās līnijas. Piemēram, 3.zīm. parādītā sistēma sastāv no 3 fragmentiem (viens no tiem satur tikai vienu punktu).



3.zīm.

Balstoties uz izdarīto pieņēmumu, pierādīsim, ka katrā fragmentā līniju ir mazāk nekā punktu. Tad arī kopējais līniju skaits būs mazāks nekā kopējais punktu skaits, bet tā būs pretruna: dots, ka līniju ir vismaz tikpat, cik punktu (t.i., vismaz *n*). Līdz ar to lemma par ciklu būs pierādīta.

Apskatīsim vienu fragmentu. Ņemsim vienu tā punktu *A* un nokrāsojam to sarkanu. Ja no *A* neiziet neviena līnija, vajadzīgais pierādīts (fragmentā ir 1 punktus un 0 līnijas, un $1>0$). Ja ir kāda līnija *AB*, nokrāsojam to sarkanu.

4.zīm.

Ja no *A* un *B* citas līnijas vairs neiziet, vajadzīgais pierādīts: fragmentā ir 2 punkti, 1 līnija un $2>1$. Ja kāda līnija ir, nokrāsojam to sarkanu. **Tā noteikti iet uz citu punktu nekā jau apskatītie *A* un *B*, citādi veidotos gredzens.**

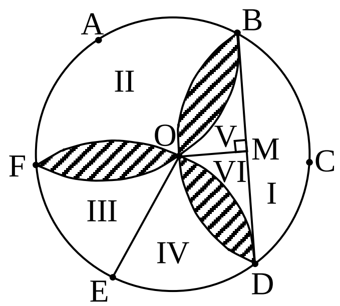
Iegūstam sarkanajā krāsā klāt **vienu** jaunu punktu un **vienu** jaunu līniju.

Tā kā iepriekš punktu sarkanā krāsā bija vairāk nekā līniju, tad arī tagad punktu sarkanajā krāsā joprojām ir vairāk nekā līniju.

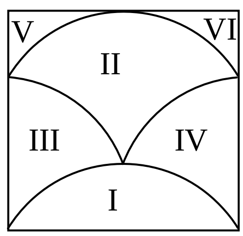
Līdzīgi turpinām, kamēr viss fragments nokrāsots sarkans. Tā kā katrā solī gan nokrāsoto punktu, gan nokrāsoto līniju daudzums palielinājās par 1, bet sākumā nokrāsoto punktu bija vairāk nekā līniju, tad arī beigās ir tāpat. Līdz ar to vajadzīgais pierādīts.

Tagad skaidrs, kā iegūt apgalvojumu par vismaz 9 galapunktiem Andra izmērītajos nogriežņos. Ja tur būtu ne vairāk par 8 galapunktiem, tad saskaņā ar lemmu par ciklu daži no šiem 8 nogriežņiem veidotu noslēgtu kontūru. Bet, kā jau redzējām risinājuma sākumā, tā nevar būt mērījumu skaitlisko vērtību dēļ.

8. Risinājuma **shēma** parādīta 5. un 6.zīm. Tiek izdarīti 3 taisni griezieni *OE*, *BD* un *OM*. Pēc tam daļas tiek saliktas tā, kā redzams 6.zīm.



5.zīm.



6.zīm.

Risinājums prasa rūpīgu pamatojumu. Ir vairāk vai mazāk „acīmredzams”, ka *OE* un *OM* neskar iesvītrotos apgabalus; bet noteikti jāpierāda, ka *BD* neiet caur iesvītrotajiem apgabaliem. Jāpamato arī, kāpēc daļas var salikt kopā tā, kā parādīts 6.zīm. (t.i., kāpēc nerodas pārklāšanās vai nepaliek tukšas vietas) un kāpēc kopējā figūra iznāk taisnstūris.

Pagaidām atstājam to izdarīt jums patstāvīgi. Kārtējā grāmatā, kurā tiks publicēti visi 2008./09.m.g. matemātisko sacensību uzdevumi un to atrisinājumi, dosim arī pilnus pierādījumus.

9. Pieņemsim no pretējā, ka Gudrītis nav liels, un iegūsim pretrunu. Tātad Gudrītis nav ne garāks, ne smagāks par kādu rūķīti *A*. Tas nozīmē, ka *A* nav ne īsāks, ne vieglāks par Gudrīti. Bet tad *A* nevar būt mazs – pretruna.
Līdzīgi iegūst pretrunu no pieņēmuma, ka Gudrītis nav mazs.

10. Viena no iespējamām dežūru secībām Andrim, Maijai, Katrīnai un Imantam 15 dienu periodam ir šāda:

A, AM, M, MK, MKA, KA, K, KI, KAI, MKAI, MKI, MI, AMI, AI, I.

Savukārt viena no iespējamām dežūru secībām Andrim, Maijai, Katrīnai, Imantam un Zanei decembra 31 dienai ir šāda:

A, AM, M, MK, MKA, KA, K, KI, KAI, MKAI, MKI, MI, AMI,AI, I, IZ, AIZ, AMIZ, MIZ, MKIZ, MKAIZ, KAIZ, KIZ, KZ, KAZ, MKAZ, MKZ, MZ, AMZ, AZ, Z.

Pārbaudiet to patstāvīgi un padomājiet, kā saraksts 4 bērniem iegūts no saraksta 3 bērniem, bet saraksts 5 bērniem – no saraksta 4 bērniem. (Profesors Cipariņš būtiski balstījās uz to, ka $7 = 2^3 - 1$, $15 = 2^4 - 1$ un $31 = 2^5 - 1$.)