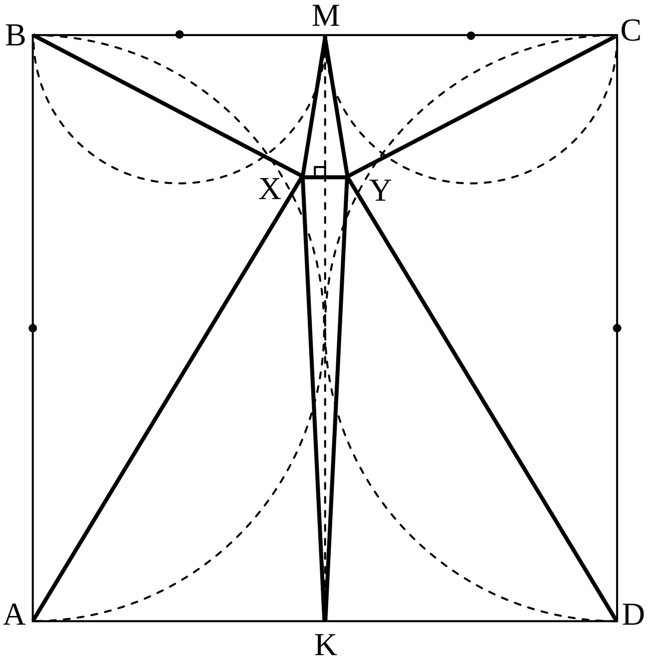
„Profesora Cipariņa kluba” 4. nodarbība 2008./2009. mācību gadā
Uzdevumu atrisinājumi.

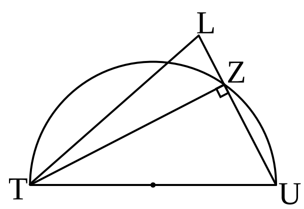
1. Naturāls skaitlis dalās ar 5 tad un tikai tad, ja tā pēdējais cipars ir vai nu 0, vai 5. Tad $S = 0$ vai $S = 5$. Ja būtu $S = 0$, tad skaitlis *ASS* beigtos ar divām nullēm. Tad tas dalītos ar 100, tātad dalītos arī ar 4. Bet dots, ka *ASS* ar 4 nedalās. Tātad $S = 5$.
Ja *OLA* dalītos ar 5, tad jābūt vai nu $A = 0$, vai $A = 5$. Tā kā $S = 5$ un $A \neq S$, tad jābūt $A = 0$. Bet tad skaitļa *ASS* pieraksts sāktos ar ciparu 0; tas nav iespējams. Iegūta pretruna.
Tātad *OLA* nevar dalīties ar 5.

2. Skat., piem., 1.zīm.



1.zīm.

Punkti *M* un *K* ir attiecīgi kvadrāta malu *BC* un *AD* viduspunkti. Skaidrs, ka *ABMK* ir taisnstūris. Pusriņķa līniju centri atrodas attiecīgi *AB*, *BM*, *MC*, *CD* viduspunktos; tātad *AB*, *BM*, *MC*, *CD* ir šo pusriņķa līniju diametri. Punkti *X* un *Y* izvēlēti tā, ka *MK* ir nogriežņa *XY* vidusperpendikuls.
Pamatosim, kāpēc visi 8 zīmējumā redzamie trijstūri ir šaurleņķu.
Lemma. Ja pusriņķa līnijas diametrs ir *TU* un nogrieznis *LU* krusto šo pusriņķa līniju, tad $\angle TLU < 90°$.



2.zīm.

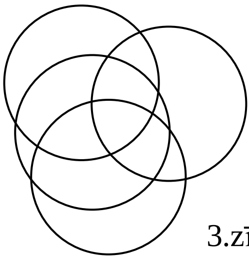
Tiešām (skat. 2.zīm.) $\angle TZU = 90°$ kā ievilkts leņķis, kas balstās uz diametru. Tāpēc $\angle TZL = 180° - 90° = 90°$. Tāpēc ΔTZL ir taisnleņķa un $\angle TLZ < 90°$. Lemma pierādīta.
Apskatīsim ΔBXM :

a) $\angle BXM < 90°$ saskaņā ar lemmu,
b) $\angle MBX < \angle MBA = 90°$,
c) $\angle BMX < \angle BMK = 90°$.

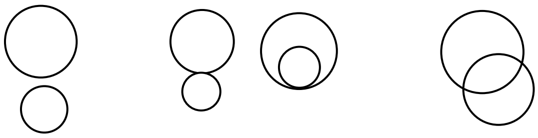
Tātad ΔBXM ir šaurleņķu.
Līdzīgi pierāda, ka ΔBXA, ΔAXK, ΔKYD, ΔDYC, ΔCYM ir šaurleņķu.

Apskatīsim ΔXMY . Acīmredzami $\angle XMY < 90°$. Saskaņā ar X un Y izvēli ΔXMY ir vienādsānu, tāpēc tā leņķi pie pamata $\angle MXY$ un $\angle MYX$ ir šauri.
Tātad ΔXMY ir šaurleņķu.
Līdzīgi pierāda, ka ΔXKY ir šaurleņķu.

3. Atbilde: 14 daļās.
Risinājums. To, ka 14 daļas var būt, redzam 3.zīm. Pierādīsim, ka vairāk daļu būt nevar.



3.zīm.



a) b) c)

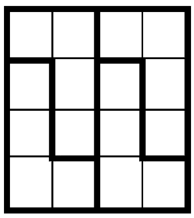
4.zīm.

Risinājumā ļoti būtiska loma ir tam, ka divām dažādām riņķa līnijām var būt tikai 0, 1 vai 2 kopīgi punkti (skat. 4.zīm.). Starp citu, no tā redzam, ka divas riņķa līnijas var sadalīt plakni augstākais 4 daļās: visi iespējamie gadījumi redzami 4.zīm.
Padomāsim, par cik var palielināties apgabalu skaits, novelkot trešo riņķa līniju ω zīmējumā, kurā jau ir divas riņķa līnijas α un β.
Riņķa līnijai ω ar α un β kopā var būt ne vairāk kā 4 kopīgi punkti. Tātad ω ar šiem punktiem sadalās augstākais 4 lokos. Katrs no šiem lokiem sadala kādu no iepriekšējām plaknes daļām divās mazākās. Citā ceļā daļu skaits nepalielinās. Tāpēc daļu skaits pieaug ne vairāk kā par 4.
Tāpēc 3 riņķa līnijas sadala plakni ne vairāk kā $4+4=8$ daļās.
Novelkot vēl ceturto riņķa līniju, iegūstam augstākais $3 \cdot 2 = 6$ kopīgus punktus ar iepriekšējām. Tātad ceturtā riņķa līnija sadalās augstākais 6 lokos, un šie loki palielina plaknes daļu skaitu ne vairāk kā par 6. Tāpēc 4 riņķa līnijas sadala plakni ne vairāk kā $8+6=14$ daļās.

4. Atbilde: 4 rūtiņas.
Risinājums. To, ka ar 4 rūtiņām pietiek, redzam 5.zīm.; viegli pārbaudīt visus iespējamos „L burta” novietojumus.

		x	
		x	
	x		
	x		

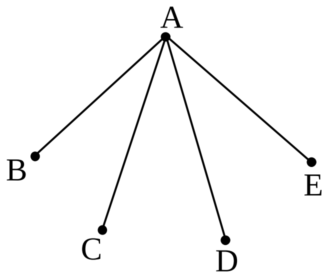
5.zīm.



6.zīm.

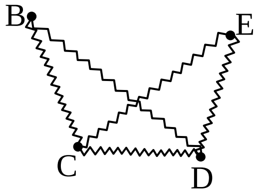
Tā kā katrā no četriem „L burtiem”, kas redzami 6.zīm., nepieciešama cita melna rūtiņa, tad ar mazāk kā 4 melnām rūtiņām nepietiek.

5. Pierādīsim, ka minētā tipa trijstūru ir vismaz 2. Tā kā atrisinājums tiek drukāts uz balta fona, attēlosim nogriežņus taisnus (______) vai viļņotus (∼∼∼∼∼∼).
Šķirosim atsevišķas iespējas.
I Var gadīties, ka ir tāds punkts, no kura iziet 4 vai pat 5 viena veida nogriežņi. Apskatīsim četrus no tiem (skat. 7.zīm.). Varam pieņemt, ka šie nogriežņi ir taisni (otrs gadījums ir analoģisks).



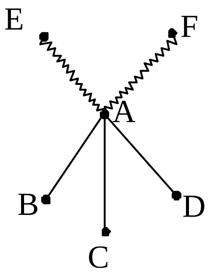
7.zīm.

Ja kaut divi no sešiem nogriežņiem, kas savieno punktus *B*; *C*; *D*; *E* savā starpā, arī ir taisni, tad vajadzīgos divus trijstūrus ar taisnām malām jau esam ieguvuši (trešā virsotne tiem ir *A*). Tāpēc atliek iespēja, kad **augstākais** viens no šiem sešiem nogriežņiem ir taisns. Varam pieņemt, ka visi 5 nogriežņi, izņemot **varbūt** *BE*, ir viļņoti (pārējie gadījumi ir analoģiski). Tad *BCD* un *ECD* ir „viļņoti” trijstūri.

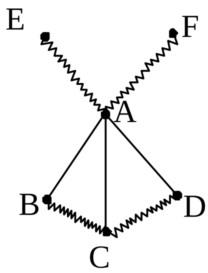


8.zīm.

II Nav tāda punkta, no kura iziet 4 vai 5 viena veida nogriežņi. Tad no katra punkta iziet 3 viena veida un 2 otra veida nogriežņi. Varam pieņemt, ka no *A* iziet 3 taisni un 2 viļņoti nogriežņi (skat. 9.zīm.); otrs gadījums ir analoģisks.



9.zīm.

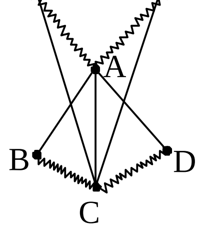


10.zīm.

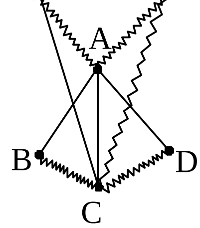
Ja kaut divi (vai visi trīs) no trim nogriežņiem *BC*, *CD*, *DB* arī ir taisni, esam ieguvuši divus „taisnus” trijstūrus (trešā virsotne tiem ir *A*). Tāpēc atliek gadījums, ja augstākais viens no tiem ir taisns, bet vismaz divi – viļņoti. Varam pieņemt, ka *CB* un *CD* ir viļņoti (skat. 10.zīm.); citi gadījumi ir analoģiski.

Tā kā mēs apskatām gadījumu, kad ne no viena punkta neiziet 4 vai 5 viena veida nogriežņi, tad pastāv divas iespējas:

II_1) abi nogriežņi *CE* un *CF* ir taisni (skat. 11.zīm.).



11.zīm.



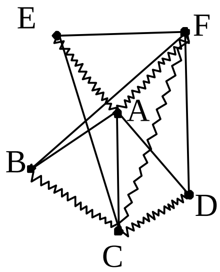
12.zīm.

Viegli redzēt: lai kādi būtu nogriežņi *EF* un *BD*, gan trijstūru pārī „*AEF* un *CEF*”, gan trijstūru pārī „*ABD* un *CBD*” būs pa vienam trijstūrim ar viena veida malām.

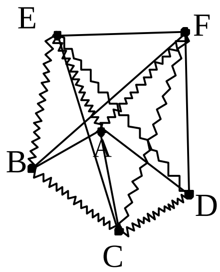
II_2) viens no nogriežņiem *CE* un *CF* ir taisns, otrs – viļņots; varam pieņemt, ka *CE* ir taisns (skat. 12.zīm.). Kā iepriekš iegūstam, ka atkarībā no *BD* veida vai nu *ABD*, vai *CBD* būs trijstūris ar viena veida malām. Centīsimies izvairīties no otra šāda trijstūra. Pakāpeniski iegūstam:

II_{21}) *EF* ir taisns (ΔAEF), *BF* ir taisns (ΔBCF) un *FD* ir taisns (ΔCFD), skat. 13.zīm.

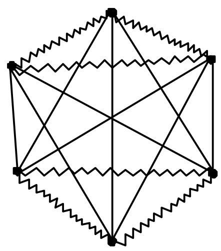
II_{21}) *BE* ir viļņots (ΔBEF) un *ED* ir viļņots (ΔEFD), skat. 14.zīm.



13.zīm.



14.zīm.


15.zīm.

Tagad redzam: ja *BD* ir taisns, tad otrais vajadzīgais trijstūris ir *BFD*, bet, ja *BD* ir viļņots, tad otrais vajadzīgais trijstūris ir *BED*.

Visi gadījumi apskatīti, uzdevums atrisināts.

Piezīme. Var gadīties, ka vairāk par diviem „vienkrāsainiem” trijstūriem nav; skat., piem., 15.zīm.

6. Apzīmēsim minētos 5 skaitļus ar $a < b < c < d < e$, to summu ar 2*S* (tātad $a+b+c+d+e=2S$) un domāsim, kuri skaitļi var būt vienā grupā ar *e*, lai šīs grupas skaitļu summa būtu *S*. Apzīmēsim šo grupu ar *G*. Šķirosim trīs iespējas.

I Grupa *G* varētu sastāvēt tikai no skaitļa *e*; tad $a+b+c+d=e=S$. Tādā gadījumā cita sadalījuma divās grupās ar vienādām summām nav, jo, pievienojot *e* kaut vienu citu skaitli, summa būs lielāka par *S*, bet atlikušo skaitļu summa – mazāka par *S*.

II Grupa *G* nevar saturēt visus 5 skaitļus (acīmredzams) un nevar arī saturēt 4 skaitļus, jo *e* jau viens pats lielāks par vienīgo atlikušo skaitli.

III Tātad grupa *G* noteikti satur vai nu *e* un vēl vienu skaitli (sauksim šādas grupas par mazām), vai arī *G* satur *e* un vēl divus skaitļus (sauksim šādas grupas par lielām). Šķirojam apakšgadījumus.

III_1 Gan Andra grupa G_A, gan Maijas grupa G_M ir mazas. Tā nevar būt, jo tad abās šajās grupās skaitlim *e* pievienots viens un tas pats cits skaitlis, tāpēc tās sakrīt; tad jāsakrīt arī otrajām abu bērnu izveidotajām grupām.

III_2 Gan Andra grupa G_A, gan Maijas grupa G_M ir lielas. Grupas G_A un G_M nevar abas saturēt vēl citu vienu un to pašu skaitli; tā kā to abu summas ir *S*, tad arī trešajiem skaitļiem tajās būtu jāsakrīt, un tad abu bērnu sadalījumi būtu vienādi.

Tā kā saskaņā ar doto $d+c > b+a$ un $d+b > c+a$, tad vienīgā iespēja ir: viena no grupām G_A un G_M ir $\{e; a; d\}$, otra - $\{e; b; c\}$. Tad iegūstam $e+a+d=S$ un $e+b+c=S$; saskaitot šīs vienādības, iegūstam $e+a+d+e+b+c=2S=a+b+c+d+e$, no kurienes seko $e=0$ - pretruna.

III3 Viena no grupām G_A un G_M ir maza, otra – liela. Pieņemsim, ka viena no tām ir $\{e;\alpha\}$, bet otra ir $\{e;\beta;\gamma\}$; te α, β, γ ir kaut kādi no atlikušajiem 4 skaitļiem a; b; c; d. Tā kā $e+\alpha=S$ un $e+\beta+\gamma=S$, tad $e+\alpha=e+\beta+\gamma$ un $\alpha=\beta+\gamma$; tāpēc skaitļi α, β, γ visi ir dažādi.

Iegūstam $e+\alpha+e+\beta+\gamma=2S$ jeb

$(e+\alpha+\beta+\gamma)+e=2S=a+b+c+d+e$, jeb

$\boldsymbol{e+\alpha+\beta+\gamma=a+b+c+d}$ (*)

Tā kā α, β, un γ ir trīs no skaitļiem a; b; c; d, tad no (*) seko: e vienāds ar ceturto no šiem skaitļiem. Bet tā ir pretruna ar doto, ka visi skaitļi ir dažādi. Tātad uzdevumā minētā situācija nav iespējama.

Piezīme. Ja skaitļu skaits (apzīmēsim to ar n + 1) ir lielāks par 5 (tātad $n\ge 5$), uzdevumā minētā situācija ir iespējama. Apskatīsim skaitļu sistēmu

$$1;\ 2;\ 3;\ ...;\ n;\ (1+2+...+n)-6.$$

Vispirms pierādīsim, ka visi skaitļi tajā ir dažādi. Pietiek pierādīt, ka $(1+2+...+n)-6>n$ jeb, ka $1+2+...+(n-1)>6$. Tā kā $n\ge 5$, tad tiešām $1+2+...+(n-1)\ge 1+2+3+4=10>6$.

Tālāk ir acīmredzams, ka Andris var izvēlēties sadalījumu

{1; 2; 4; 5; ...; n} un {3; $(1+2+...+n)-6$ },

bet Maija – sadalījumu

{3; 4; 5; ...; n} un {1; 2; $(1+2+...+n)-6$ }.

7. Apzīmēsim $a-b=x$; $b-c=y$; $c-a=z$. Tad $x+y+z=0$.

Identisku pārveidojumu ceļā iegūstam

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}=$$

$$=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2-2\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y}-2\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{z}-2\cdot\frac{1}{y}\cdot\frac{1}{z}=$$

$$=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2-2\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{xz}+\frac{1}{yz}\right)=$$

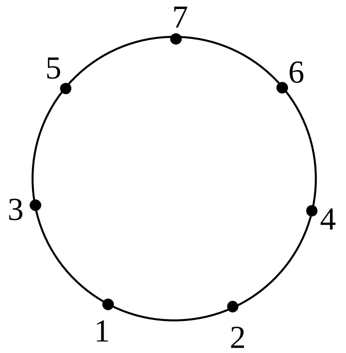
$$=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2-2\cdot\frac{x+y+z}{xyz}=$$

$$=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2,$$

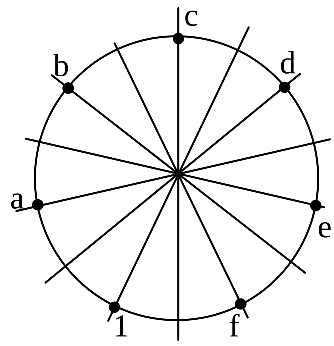
jo $x+y+z=0$, tāpēc lielums $2\cdot\frac{x+y+z}{xyz}$ anulējas.

Tā kā x, y, z – racionāli skaitļi, tad no vienādības $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2$ seko vajadzīgais.

8. Skaidrs, ka der arī secība, kas **pretēja** uzdevumā dotajai (skat. 16.zīm.).



16.zīm.



17.zīm.

Pierādīsim, ka citu secību, izņemot uzdevuma nosacījumos minēto un 16.zīm. doto, nav.

Apskatāmajai punktu sistēmai ir 7 simetrijas asis; katra no tām iet caur riņķa līnijas centru un kādu no 7 punktiem. Izvēlēsimies skaitļa 1 atrašanās vietu un apzīmēsim pārējos skaitļus, kā parādīts 17.zīm.

Pastāv divas iespējas: vai nu $a > f$, vai $a < f$. Pieņemsi, ka $\boldsymbol{a > f}$ (otrs gadījums ir analoģisks). Tad, aplūkojot asi, kas iet caur punktu ar skaitli 1, iegūstam $\boldsymbol{b > e}$ un $\boldsymbol{c > d}$.

Aplūkojot asi, kas iet caur punktu ar skaitli *c*, redzam, ka $\boldsymbol{f > 1}$; tāpēc jābūt arī $\boldsymbol{e > a}$ un $\boldsymbol{d > b}$.

No izceltajām nevienādībām seko, ka

$$\boldsymbol{1 < f < a < e < b < d < c} \qquad (*)$$

Tā kā skaitļi *f*; *a*; *e*; *b*; *d*; *c* ir tie paši skaitļi 2; 3; 4; 5; 6; 7, tad iegūstam 16.zīm. parādīto secību.

Līdzīgi, ja būtu $a < f$, mēs iegūtu uzdevuma nosacījumos doto secību.

9. Maija var uzvarēt, lietojot sekojošu stratēģiju. Viņa domās sadala visus ierakstāmos 100 skaitļus sekojošos pāros: (2; 3), (4; 5), (6; 7), ..., (96; 97), (98; 99), (100; 1). Tikko Katrīna ieraksta kādā rūtiņā vienu skaitli no kāda pāra, Maija ar atbildes gājienu ieraksta citā tās pašas rindiņas rūtiņā otru skaitli no šī paša pāra. Tā kā katrā rindiņā ir 10 (pāra skaits) rūtiņu, tad Maija šo plānu **var** realizēt. Kad visas rūtiņas būs aizpildītas, rindiņās ierakstītie mazākie skaitļi būs deviņi no pāra skaitļiem 2; 4; 6; 8; ...; 96; 98, kā arī vieninieks. Deviņu pāra skaitļu un viena nepāra skaitļa summa būs nepāra skaitlis, tātad Maija uzvarēs.

10. Jūsu vēstules ar pašu sastādītajiem uzdevumiem turpina pienākt. Par iesūtītajiem materiāliem runāsim vēlāk.