„Profesora Cipariņa kluba” 5. nodarbība 2008./2009. mācību gadā
Uzdevumu atrisinājumi.

**1.** Tā kā $1000000 = 100 \times 100 \times 100$, tad minēto sagriešanu var izdarīt, sadalot kubu 100 horizontālos slāņos, 100 „ziemeļu – dienvidu” virziena slāņos un 100 „austrumu – rietumu” virziena slāņos. Tādā gadījumā tiek izdarīti 99 horizontāli šķēlumi, 99 „ziemeļu – dienvidu” virziena šķēlumi un 99 „austrumu – rietumu” virziena šķēlumi. Katra šķēluma laukums vienāds ar kuba skaldnes laukumu (apzīmēsim to ar L), turklāt katrs šķēlums veido daļu no virsmas laukuma **divos** kubiņu slāņos. Tāpēc mazo kubiņu virsmas daļa, kas veidojas šķēluma rezultātā, ir (99+99+99)·2L. Pieskaitot vēl sākotnējā kuba skaldņu laukumus, iegūstam, ka visu mazo kubiņu kopējais virsmas laukums ir 3·99·2L+6L. Tā kā sākotnējā kuba virsmas laukums ir 6L, tad meklētā attiecība ir (3·99·2L+6L):6L=100.

**2.** Pārveidojot vienādojuma kreiso pusi, iegūstam $\frac{17}{30} = \cfrac{1}{x + \cfrac{1}{y + \frac{1}{z}}}$, no kurienes seko

$$1\frac{13}{17} = x + \cfrac{1}{y + \frac{1}{z}} \qquad (1).$$

Tā kā $y$ un $z$ – naturāli skaitļi, tad $0 < \cfrac{1}{y + \frac{1}{z}} < 1$, pie tam $\cfrac{1}{y + \frac{1}{z}}$ – racionāls skaitlis. Katram racionālam skaitlim ir viennozīmīgi noteikta tā veselā daļa un daļveida daļa, tāpēc no (1) seko $x = 1$ un $\frac{13}{17} = \cfrac{1}{y + \frac{1}{z}}$, no kurienes

$$1\frac{4}{13} = y + \frac{1}{z} \qquad (2)$$

Līdzīgi kā iepriekš iegūstam, ka jābūt $y = 1$ un $z = \frac{13}{4}$. Bet $\frac{13}{4}$ nav naturāls skaitlis. Tātad tādu *x*, *y*, *z*, par kādiem runāts uzdevumā, nav.

**3.** Apskatīsim 2 iespējas.

**A.** Skaitļa $a$ pēdējais cipars ir 5. Viegli saprast: ja $a = b \cdot b$, kur $b$ – naturāls skaitlis, un $a$ beidzas ar ciparu 5, tad arī $b$ beidzas ar ciparu 5. (Visus citus $b$ pēdējos ciparus var pārbaudīt un konstatēt, ka neviens no tiem neder.) Tad $b = 10 \cdot y + 5$, $y$ – naturāls skaitlis; tāpēc $b^2 = (10y+5)^2 = 100y^2 + 100y + 25$. No tā redzam, ka skaitļa $a$ priekšpēdējam ciparam jābūt 2; tātad $a = \overline{\underbrace{55\ldots5}_{98\ \textit{reizes}}25}$.

Šī skaitļa ciparu summa ir $99 \cdot 5 + 2$; tātad tā dod atlikumu 2, dalot ar 3. Tātad arī pats skaitlis $a$ dod atlikumu 2, dalot ar 3 (atceramies, ka skaitlis un tā ciparu summa dod vienādus atlikumus gan dalot ar 3, gan dalot ar 9). Pieņemsim, ka $a = b^2$, $b$ – naturāls skaitlis. Padomāsim, kādu atlikumu dod $b$, dalot ar 3. Pastāv 3 iespējas.

**A₁.** Skaitlis $b$ dod atlikumu 0, dalot ar 3, t.i., $b = 3m$, $m$ – naturāls. Tad $b^2 = 9m^2$, tātad $b^2$ dod atlikumu 0, dalot ar 3. Tāpēc šī iespēja atkrīt.

**A₂.** Skaitlis $b$ dod atlikumu 1, dalot ar 3, t.i., $b = 3m+1$, $m$ – naturāls. Tad $b^2 = 9m^2 + 6m + 1$, tātad $b^2$ dod atlikumu 1, dalot ar 3. Tāpēc arī šī iespēja atkrīt.

**A₃.** Skaitlis $b$ dod atlikumu 2, dalot ar 3, t.i., $b = 3m + 2$, $m$ – naturāls. Tad $b^2 = 9m^2 + 12m + 4 = 3(3m^2 + 4m + 1) + 1$, tātad $b^2$ dod atlikumu 1, dalot ar 3. Tāpēc arī šī iespēja atkrīt.

**B.** Skaitļa a pēdējais cipars ir atšķirīgs no 5. Tad $a = \overline{\underbrace{55\ldots5}_{99\ reizes}x}$, kur $x$ – kaut kāds no 5 atšķirīgs cipars. Tātad $\underbrace{55\ldots5}_{99\ reizes}0 \le a \le \underbrace{55\ldots5}_{99\ reizes}9$.

Pārbaudīsim visas iespējas.

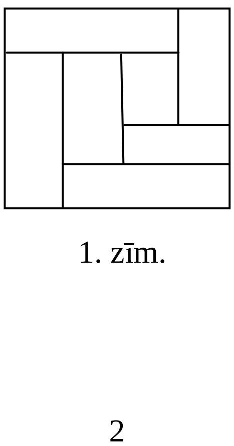
- Ja $a = \underbrace{55\ldots5}_{99}0$, tad $a$ nav pilns kvadrāts; tiešām, $a$ dalās ar 10, tātad tam būtu jādalās arī ar 100, bet tā nav.
- Skaitlis $a$ nevar beigties ar cipariem 2; 3; 7; 8, jo neviena naturāla skaitļa kvadrāts ar tādiem nebeidzas.
- Skaitlis $a$ nevar beigties ar ciparu 5 pēc uzdevumā dotā (ne visi $a$ cipari ir piecinieki).
- Skaitlis $a$ nevar beigties ar ciparu 6. Ja tā būtu, tad $a$ ciparu summa būtu $99 \cdot 5 + 6$, kas dalās ar 3; tad arī $a$ dalītos ar 3. Tā kā $a = b \cdot b$, $b$ – naturāls, tad $b$ dalās ar 3; tad $a = b \cdot b$ dalās ar $3 \cdot 3 = 9$. Tad $a$ ciparu summai jādalās ar 9. Bet šī summa, kas ir $99 \cdot 5 + 6$, nedalās ar 9 (atlikumā paliek 6).
- Ja $a$ beigtos ar 1 vai ar 9, tad $a$ dotu atlikumu 3, dalot ar 4 ($a = \underbrace{55\ldots5}_{98}00 + 48 + 3$ resp. $a = \underbrace{5\ldots5}_{98}00 + 56 + 3$); savukārt, ja $a$ beigtos ar 4, tad $a$ dotu atlikumu 2, dalot ar 4 ($a = \underbrace{55\ldots5}_{98}00 + 52 + 2$). Pierādīsim, ka tā nevar būt. Tiešām, ja $a = b^2$ un $b$ ir pāra skaitlis, $b = 2n$, tad $a^2 = (2n)^2 = 4n^2$, tātad $a$ dod atlikumu 0, dalot ar 4. Savukārt, ja $a = b^2$ un $b$ ir nepāra skaitlis, $b = 2n + 1$, tad $a^2 = 4(n^2 + n) + 1$, tātad $a$ dod atlikumu 1, dalot ar 4.

Visi gadījumi pārbaudīti. Secinām, ka tāda skaitļa $a$, par kādu runāts uzdevumā, nav.

**4.** Apzīmēsim profesoru naudas daudzumus santīmos ar $A < B < C < D < E < F < G$. Pieņemsim, ka $E + F + G < 50$. **Tad noteikti jābūt $\boldsymbol{E \le 15}$.** Tiešām, ja būtu $E \ge 16$, tad $F \ge 17$ (jo jābūt $F > E$) un $G \ge 18$ (jo jābūt $G > F$), bet tad $E + F + G \ge 16 + 17 + 18 \ge 51$ - pretruna.

No izceltā apgalvojuma savukārt pakāpeniski seko $D \le E - 1 \le 14$, $C \le D - 1 \le 13$, $B \le C - 1 \le 12$, $A \le B - 1 \le 11$; tātad $A + B + C + D \le 50$ un $E + F + G < 50$, iegūstam $A + B + C + D + E + F + G < 100$ - pretruna. Tātad mūsu pieņēmums nepareizs.

**5.** Jā, var. Skat., piem., 1. zīm.



1. zīm.

**6.** Apzīmēsim $a=\frac{1}{A}$, $b=\frac{1}{B}$, $c=\frac{1}{C}$, $d=\frac{1}{D}$. Tad pierādāmā nevienādība pārveidojas par $\frac{1}{A+B}+\frac{1}{A+C}+\frac{1}{A+D}+\frac{1}{B+C}+\frac{1}{B+D}+\frac{1}{C+D}\le\frac{3}{4}$ un tālāk par

$$\frac{4}{A+B}+\frac{4}{A+C}+\frac{4}{A+D}+\frac{4}{B+C}+\frac{4}{B+D}+\frac{4}{C+D}\le 3 \quad (1)$$

Pieņemsim uz brīdi, ka pozitīviem $x$ un $y$ esam pierādījuši nevienādību

$$\frac{4}{x+y}\le\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \quad (2)$$

Ievietojot šai nevienādībā $x=A,\ y=B$, iegūsim $\frac{4}{A+B}\le\frac{1}{A}+\frac{1}{B}$. Līdzīgi iegūsim $\frac{4}{A+C}\le\frac{1}{A}+\frac{1}{C}$, $\frac{4}{A+D}\le\frac{1}{A}+\frac{1}{D}$, $\frac{4}{B+C}\le\frac{1}{B}+\frac{1}{C}$, $\frac{4}{B+D}\le\frac{1}{B}+\frac{1}{D}$, $\frac{4}{C+D}\le\frac{1}{C}+\frac{1}{D}$. Saskaitot šīs 6 nevienādības, iegūstam

$$\frac{4}{A+B}+\frac{4}{A+C}+\frac{4}{A+D}+\frac{4}{B+C}+\frac{4}{B+D}+\frac{4}{C+D}\le 3\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}+\frac{1}{D}\right) \quad (3)$$

Tā kā saskaņā ar uzdevumā doto $\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}+\frac{1}{D}=a+b+c+d=1$, tad no (3) seko (1), kas arī bija jāpierāda.

Tātad atliek pierādīt (2).

Identisku pārveidojumu ceļā pakāpeniski iegūstam

$$\frac{4}{x+y}\le\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \quad (2)$$

$$\frac{4}{x+y}\le\frac{x+y}{xy}$$

Reizinām abas puses ar $(x+y)$ un $xy$; to drīkst darīt, jo $x$ un $y$ ir pozitīvi skaitļi.

$$4xy\le(x+y)^2$$

$$x^2+2xy+y^2-4xy\ge 0$$

$$x^2-2xy+y^2\ge 0$$

$$(x-y)^2\ge 0$$

Pēdējā nevienādība ir pareiza, tāpēc pareiza ir arī sākotnējā (2). Uzdevums atrisināts.

**7.** Runājot par viencipara, divciparu, ... skaitļiem, automātiski tiek pieņemts, ka apskatām naturālos skaitļus. Trīsciparu naturālie skaitļi ir no 100 līdz 999 ieskaitot; to pavisam ir 900, un naturālo skaitļu virknē tie izvietoti pēc kārtas. Katrs trešais no tiem dalās ar 3. Tā kā 900 pēc kārtas ņemtus naturālus skaitļus var sadalīt 300 pēc kārtas ņemtu naturālu skaitļu trijniekos un katrā no tiem tieši viens skaitlis dalās ar 3, tad ir tieši 300 trīsciparu naturāli skaitļi, kas dalās ar 3. Tā kā ar 3 dalās tie un tikai tie naturālie skaitļi, kuru ciparu summa dalās ar 3, tad atbilde c) daļā ir **300**.

Trīsciparu naturāla skaitļa ciparu summa $S$ ir naturāls skaitlis. Tā dalās ar 26, ja tās vērtība ir 26; 52; 78; ... .Tā kā neviens cipars nepārsniedz 9, tad $S\le 27$; tāpēc mūsu gadījumā b) daļā $S=26$. Skaidrs , ka summa $S$ var būt iegūta tikai kā

$8+9+9=9+8+9=9+9+8$ (ņemot vērā saskaitāmo kārtību). Tāpēc b) daļas nosacījumus apmierina tikai skaitļi 899; 989; 998, un atbilde te ir **3**.

Apskatīsim jebkurus 10 pēc kārtas ņemtus naturālus skaitļus, no kuriem pirmais beidzas ar ciparu 0; tad pēdējais no tiem beidzas ar ciparu 9. Katram nākamajam no tiem ciparu summa ir par 1 lielāka nekā iepriekšējam. Tāpēc pusei no tiem ciparu summas ir pāra skaitļi, bet pusei – nepāra. Tātad katrā šādā desmitniekā pusei skaitļu ciparu summas ir nepāra skaitļi. Tā kā pavisam ir 90 šādi desmitnieki, tad ciparu summas dalās ar 2 tieši $\frac{900}{2}=450$ trīsciparu naturāliem skaitļiem.

**8.** Feja aizdedzina reizē no abiem galiem zariņu A un no viena gala – zariņu B. Brīdī, kad zariņš A būs nodedzis pilnībā, būs pagājusi tieši pusstunda; tātad zariņam B būs atlikusi, ko degt, pusstunda. Šai brīdī aizdedzinām zariņu B no otra gala un sākam vārīt eliksīru. Brīdī, kad zariņš B būs nodedzis pilnībā, eliksīrs būs gatavs.

**9.** Skaidrs, ka uzrakstus var samainīt vairāk nekā vienā veidā, tāpēc pavisam bez bumbiņu izņemšanas prasīto noskaidrot nevarēs.

Alnis izņem vienu bumbiņu no kastītes, uz kuras **tagad** ir uzraksts MB. Viņam ir skaidrs, ka šai kastītē patiesībā ir vai nu divas melnas, vai divas baltas bumbiņas; tāpēc, redzot izņemtās bumbiņas krāsu, viņam ir skaidrs, kādas bumbiņas tajā ir.

Pieņemsim, ka Aļņa izņemtā bumbiņa ir balta. Tad no abām atlikušajām kastēm ar uzrakstiem MM un BB vienā ir divas melnas bumbiņas; saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem, tā nevar būt kastīte ar uzrakstu MM, tātad tā ir kastīte ar uzrakstu BB. Tad kastītē ar uzrakstu MM ir viena melna un viena balta bumbiņa. Viss vajadzīgais noskaidrots.

Gadījumu, kad Aļņa izņemtā bumbiņa ir melna, analizē līdzīgi.

**10. Atbilde**: nē, tā gadīties nevar.

**Risinājums**. Pieņemsim, ka lodei ir ziemeļpols Z un dienvidpols D; tie ir diametrāli pretēji punkti. Apskatīsim ekvatoru; skaidrs, ka šajā riņķa līnijā var ievilkt vienādmalu trijstūri ABC. Tātad AB=BC=CA; skaidrs arī, ka ZA=ZB=ZC un DA=DB=DC.

Pieņemsim, ka muriburi no lodes punktiem A; B; C; D; Z pārceļas attiecīgi uz plaknes punktiem $A_1$; $B_1$; $C_1$; $D_1$; $Z_1$. Tad jābūt $A_1B_1= B_1C_1= C_1A_1$, t.i., $A_1B_1C_1$ – vienādmalu trijstūris. Jābūt arī $D_1A_1=D_1B_1=D_1C_1$, t.i., punktam $D_1$ jābūt $\Delta A_1B_1C_1$ apvilktās riņķa līnijas centram. Tas pats attiecas uz $Z_1$. Tas nozīmē, ka muriburiem no punktiem Z un D jāpārceļas uz vienu un to pašu punktu; tātad attālums starp viņiem, kas agrāk bija pozitīvs skaitlis, tagad ir 0 – pretruna.