Uzdevumu atrisinājumi.

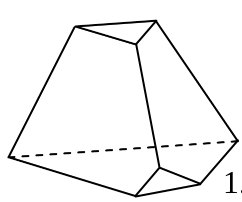
1. Uzdevumā ietverto frāzi „... samaksāja tik latu, cik flomāsterus var nopirkt par vienu latu” var saprast vismaz trejādi. Cik flomāsteru var nopirkt par vienu latu, ja viens flomāsters maksā, piemēram, 11 santīmu? Var sacīt, ka var nopirkt 9 flomāsterus, kas kopā maksā 99 santīmus, un viens santīms paliek pāri; var sacīt arī, ka par 1 latu flomāsterus nopirkt nevar, jo izdotā naudas summa nevar būt tieši 1 lats (100 nedalās ar 11); var arī sacīt, ka par 1 latu var nopirkt jebkuru daudzumu flomāsteru no 1 līdz 9 ieskaitot. Mēs izmantosim pirmo nostādni, kas sakrīt ar sarunvalodā pieņemto. Par vienu latu nopērkamo flomāsteru skaits noteikti ir naturāls skaitlis. Tātad saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem Cipariņš izdeva naturālu skaitu latu: 1 latu, 2 latus, 3 latus, ... Apzīmēsim viena flomāstera cenu santīmos ar x; tātad Cipariņš samaksāja $25 \cdot x$ santīmus jeb $\frac{x}{4}$ latus. Tātad $\frac{x}{4}$ ir naturāls skaitlis, un x pieņem vienu no vērtībām 4; 8; 12; ... . Apzīmēsim $x = 4t$, t – naturāls. Tad par vienu latu nopērkamo flomāsteru skaits ir **lielākais naturālais skaitlis, kas nepārsniedz** $\boldsymbol{\frac{100}{x}}$.

Sastādām tabulu:

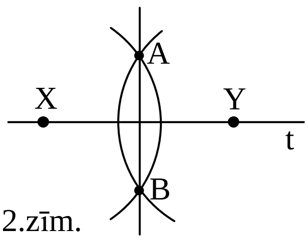
x	Izdoto latu skaits $\frac{x}{4}$	Lielākais naturālais skaitlis, kas nepārsniedz $\frac{100}{x}$
4	1	25
8	2	12
12	3	8
16	4	6
20	**5**	**5**
24	6	4
...	...	...

Skaidrs, ka, x vērtībai tālāk augot, iztērēto latu skaits $\frac{x}{4}$ būs ne mazāks par 6, bet lielākais naturālais skaitlis, kas nepārsniedz $\frac{100}{x}$, būs ne lielāks par 4; tāpēc šie lielumi nevarēs būt vienādi. Tātad vienīgā iespēja ir $x = 20$, t.i., viens flomāsters maksā 20 santīmus un Cipariņš izdeva 5 latus; tiešām, redzam, ka par 1 latu var nopirkt 5 flomāsterus.

2. Jā, eksistē. Skat., piem., 1.zīm., kur redzama trijstūra piramīda, kam nošķeltas divas virsotnes.



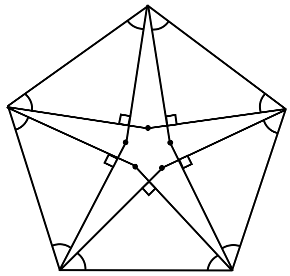
1.zīm.



2.zīm.

3. Skat., piem., 2.zīm. Uz taisnes t brīvi izvēlēti divi punkti X un Y un novilkti loki caur A, kuru centri ir šie divi punkti; loku otru krustpunktu apzīmējam ar B. Tā kā $XA = XB$, tad X atrodas uz AB vidusperpendikula; tā kā $YA = YB$, tad arī Y atrodas uz AB vidusperpendikula. Tātad taisne t ir AB vidusperpendikuls; tātad $AB \perp t$, kas arī bija vajadzīgs.

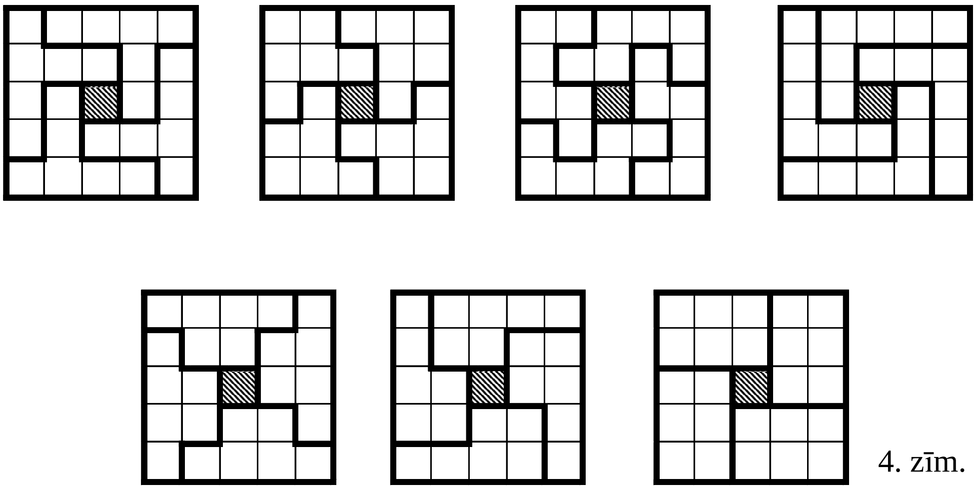
4. Skat., piem., 3.zīm.



3.zīm.

„Ārējās” virsotnes ir regulāra piecstūra virsotnes. Uz šī piecstūra malām kā hipotenūzām piecstūra iekšpusē konstruēti vienādsānu taisnleņķa trijstūri (tātad visi ar vienu lociņu apzīmētie leņķi ir $45°$ lieli); katešu pagarinājumu krustpunkti ir „iekšējās” virsotnes.

5. Skat., piem., 4.zīm., kur parādītas 7 iespējas; katrā no tām ir citas formas daļas.



4. zīm.

6. Pārveidojam vienādojumu formā

$$\frac{5}{x+5}\left(1+\frac{4}{x+4}\left(1+\frac{3}{x+3}\left(1+\frac{2}{x+2}\left(1+\frac{1}{x+1}\right)\right)\right)\right)=2009$$

Tā kā $1+\frac{1}{x+1}=\frac{x+2}{x+1}$, tālāk iegūstam

$$\frac{5}{x+5}\left(1+\frac{4}{x+4}\left(1+\frac{3}{x+3}\left(1+\frac{2}{x+1}\right)\right)\right)=2009$$

Līdzīgi tālāk pakāpeniski iegūstam

$$\frac{5}{x+5}\left(1+\frac{4}{x+4}\left(1+\frac{3}{x+1}\right)\right)=2009$$

$$\frac{5}{x+5}\left(1+\frac{4}{x+1}\right)=2009$$

$\frac{5}{x+1}=2009$, no kurienes $x+1=\frac{5}{2009}$ un $x=-\frac{2004}{2009}$.

7. Monētu, uz kuras uzrakstīts „*n* grami”, apzīmēsim ar n. Cipariņš vispirms nosver kopā 11 un 12. Ja iegūts rezultāts „23g”, tad viena no svērtajām monētām tiešām sver 11g, bet otra – 12g. Otrajā reizē Cipariņš nosver kopā 11 un 13. Rezultāts „24 grami” iespējams tikai, ja viena no svērtajām monētām sver 11g, bet otra – 13g. No abām izdarītajām svēršanām tagad zināms, ka 11, 12 un 13 ir „īstas”. (Ja kaut viena no šīm svēršanām dod citādu rezultātu, tad Cipariņš konstatē, ka ne visi uzraksti uz monētām ir pareizi, un tālākas svēršanas vairs neizdara.)
Tagad Cipariņš atliek malā monētas 11, 12 un 13 un izdara līdzīgus eksperimentus ar 14, 15 un 16. Ja arī tās izrādās „īstas”, tad pēdējā monēta 17 nevar svērt citādi kā 17g, un Cipariņš ir pārliecinājies, ka visi uzraksti ir pareizi. Ja otrajā eksperimentu sērijā tiek konstatēts, ka kāds uzraksts ir nepareizs, Cipariņš arī ir sasniedzis savu mērķi.

8. Atzīmēsim: ja divu skaitļu saskaitīšanā pārnesumi nerodas, tad summas ciparu summa ir vienāda ar summu, kuru iegūst, saskaitot savā starpā abu saskaitāmo ciparu summas. Ja turpretī kādā šķirā rodas pārnesumi (t.i., saskaitot ciparus šajā šķirā, iegūst divciparu skaitli $\overline{1a}=10+a$), tad rezultātā mēs rakstām tikai ciparu *a*, bet abu saskaitīto ciparu summas komponente 10 tiek pārnesta uz nākošo šķiru kā vieninieks; tātad rezultāta ciparu summa samazinās par 9, salīdzinot ar abu saskaitāmo visu ciparu summu. Nākošais pārnesums, ja tāds ir, atkal „samazina” rezultāta ciparu summu par 9, u.t.t.
No šejienes skaidrs, ka b) gadījums nav iespējams, jo $54>20+25$; c) gadījums nav iespējams, jo 22 gan ir mazāks par $20+25$, bet $(20+25)-22=23$ nedalās ar 9. Savukārt a) gadījums ir iespējams (piem., $55555+44444=99999$), un arī d) gadījums ir iespējams (piem., $6667+83333=90000$).

9. Atbilde: Ls 20 000,- .
Risinājums. Šādas izmaksas var sasniegt, piemēram, tā, kā parādīts 5.zīm.

Darbinieks / Iekārta	A	B	C	D	E	F	G	H
1.	X	X	X	X				
2.	X	X	X		X			
3.	X	X	X			X		
4.	X	X	X				X	
5.	X	X	X					X

5.zīm.

Ja darbā ierodas visi 5 „šauri specializējušies” darbinieki D; E; F; G; H, tad visas iekārtas var darbināt. Ja daži no viņiem aiziet uz bibliotēku, tad viņu vietā ir tāds pats daudzums „universālu”, kas katrs var aizvietot jebkuru iztrūkstošo, un atkal viss ir kārtībā.
Tagad parādīsim, ka ar mazāk nekā 20 apmācībām nepietiek. Tiešām, ja notikuši mazāk nekā 20 apmācības procesi, tad ar vismaz vienu iekārtu apmācīti strādāt **ne vairāk kā 3 darbinieki** (ja ar katru prastu strādāt vismaz četri, tad apmācību skaits

būtu ne mazāks par $4 \cdot 5 = 20$). Ja kādu dienu neviena no viņiem nav darbā, attiecīgā iekārta stāv dīkā.

10. Atbilde: 14.

Risinājums. Skaitļi 2; 3; 4; ...; 15 apmierina uzdevuma prasības; pārbaudiet to patstāvīgi. Pieņemsim, ka izdevies atrast 15 šādus skaitļus; tad lielākais no tiem ir vismaz 16. No katriem 8 pēc kārtas ņemtiem naturāliem skaitļiem viens dalās ar 8; tāpēc arī viens no 8 lielākajiem mūsu apskatāmajiem skaitļiem dalās ar 8 (apzīmēsim to ar *x*). Pierādīsim, ka $x > 8$. Tiešām, ja **lielākais** no apskatāmajiem 15 skaitļiem ir vismaz 16, tad **8 lielākie** no šiem 15 skaitļiem visi ir vismaz 9; tātad arī *x* ir vismaz 9. Ja *x* dalās ar 8, tad $x = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot q$, kur *q* – naturāls skaitlis, turklāt $q > 1$, citādi nebūtu spēkā sakarība $x > 8$. Tā kā *q* dalās ar vismaz vienu pirmskaitli (varbūt pats ir pirmskaitlis), tad *x* sadalās vismaz 4 pirmskaitļu reizinājumā – pretruna.