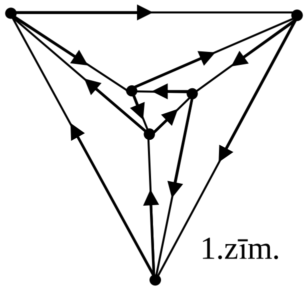
„Profesora Cipariņa kluba” 2. nodarbība 2009./2010. mācību gadā
Uzdevumu īsi atrisinājumi.

1. Jā, var. Skat., piem., 1.zīm.



1.zīm.

2. Ja daļas skaitītājs un saucējs ir pozitīvi skaitļi, tad, palielinot saucēju, daļas vērtība samazinās. Pieskaitām pirmajai daļai saucējā *a*, otrajai *b*, trešajai *c*, ceturtajai *d*. Tad iegūstam

$$\frac{a+b}{b+c+d}+\frac{b+c}{c+d+a}+\frac{c+d}{d+a+b}+\frac{d+a}{a+b+c}>$$

$$>\frac{a+b}{b+c+d+a}+\frac{b+c}{c+d+a+b}+\frac{c+d}{d+a+b+c}+\frac{d+a}{a+b+c+d}=$$

$$=\frac{(a+b)+(b+c)+(c+d)+(d+a)}{a+b+c+d}=\frac{2(a+b+c+d)}{a+b+c+d}=2\text{, k.b.j.}$$

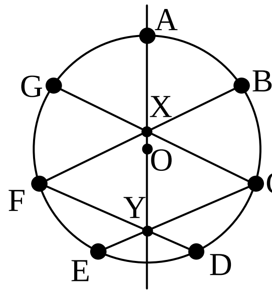
3. Divciparu naturāli skaitļi, kas dalās ar vismaz 3 dažādiem pirmskaitļiem un nesatur 0, ir $2\cdot3\cdot7=42$, $2\cdot3\cdot11=66$, $2\cdot3\cdot13=78$, $2\cdot2\cdot3\cdot7=84$. Neviens no pirmajiem 50 cipariem nevar būt 2 (jo tad nākošā cipara vispār nevarētu būt), nevar būt 4 (jo tad nākošais būtu 2 un aiznākošā vispār nevarētu būt); tāpat tas nevar būt 8 vai 7. Tāpēc visi pirmie 50 cipari var būt tikai 6.
Skaitlis, kas sastāv tikai no sešiniekiem, apmierina uzdevuma prasības. Tāpēc meklētais cipars ir 6.

4. Atbilde: a) nē, nevar; **b)** jā, var.
Risinājums. a) Pieņemsim, ka tādi skaitļi eksistē, un apzīmēsim tos ar $a_1<a_2<a_3<a_4<a_5<a_6<a_7<a_8<a_9$.
Pēc dotā $a_1\geq1$. Jābūt $a_2>1\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$; tā kā a_2 naturāls, tad no $a_2>\frac{3}{2}$ seko $a_2\geq2$. Tā kā $a_3>\frac{3}{2}\cdot a_2$, tad $a_3>\frac{3}{2}\cdot2=3$. Tā kā a_3 naturāls, tad jābūt $a_3\geq4$. Jābūt $a_4>\frac{3}{2}\cdot a_3>\frac{3}{2}\cdot4=6$; tā kā a_4 ir naturāls, tad jābūt $a_4\geq7$. Līdzīgi iegūstam $a_5\geq11$, $a_6\geq17$, $a_7\geq26$, $a_8\geq40$, $a_9\geq61$. Iegūta pretruna, tātad mūsu pieņēmums nepareizs.
b) Tādi ir, piemēram, augošā secībā izvietoti skaitļi

$$1;\quad \frac{8}{5};\quad \frac{5}{2};\quad 4;\quad \frac{31}{5};\quad \frac{19}{2};\quad 15;\quad 23;\quad 35.$$

Katrs nākošais ir vairāk nekā 1,5 reizes lielāks par iepriekšējo.

5. Minēto 7 punktu sistēma ir simetriska attiecībā pret diametru *AO* (*O* – riņķa centrs). Tāpēc nogriežņi *BF* un *GC* krustojas punktā *X*, kas atrodas uz šī diametra. Līdzīgi nogriežņi *CE* un *FD* krustojas punktā *Y*, kas atrodas uz šī diametra. Atrodam punktus *X* un *Y* un caur tiem novelkam diametru, kas iet caur punktu *A*. Pēc tam līdzīgi konstruējam diametru, kas iet caur punktu *B*. Abu diametru krustpunkts ir riņķa centrs.



2.zīm.

6. Nē, tā nevar būt. Apzīmēsim „pārējās” rindiņās un kolonnās ierakstīto skaitļu summas attiecīgi ar r_1, r_2, k_1, k_2, bet visu tabulā ierakstīto skaitļu summu ar *S*. Tad jābūt

$S = 2009 + r_1 + r_2$ un

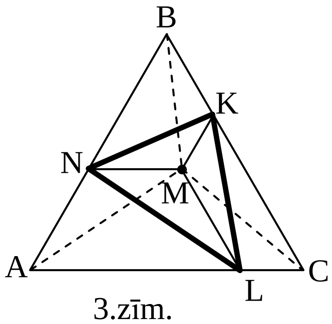
$S = 2010 + k_1 + k_2$, tāpēc

$2009 + r_1 + r_2 = 2010 + k_1 + k_2$, no kurienes seko $r_1 + r_2 - k_1 - k_2 = 1$.

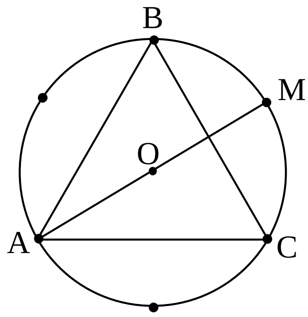
Tā kā r_1, r_2, k_1, k_2 dalās ar 3, tad arī izteiksme $r_1 + r_2 - k_1 - k_2$ dalās ar 3; bet 1 ar 3 nedalās.

Tāpēc apskatāmā situācija nav iespējama.

7. a) Novelkam caur punktu *M* taisnes paralēli *ABC* malām; tās krusto šīs malas atbilstoši punktos *N*, *K*, *L* (skat. 3.zīm.).



3.zīm.



4.zīm.

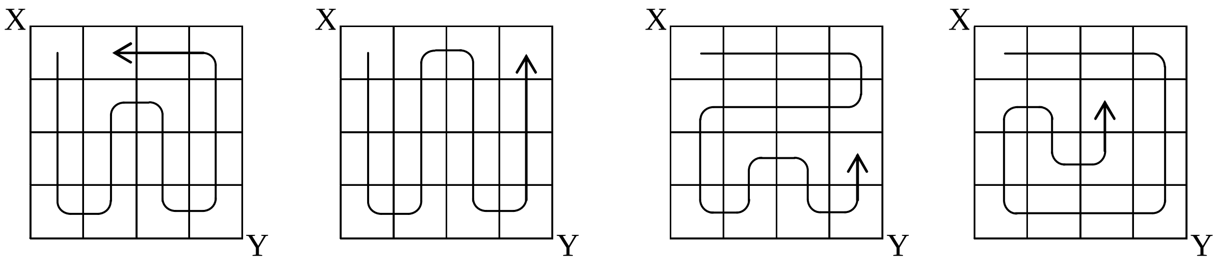
Tad $\angle MLA = \angle BCA$ (kāpšļu leņķi), tāpēc $\angle MLA = \angle NAL$. Tāpēc trapece *ANML* ir vienādsānu trapece. Vienādsānu trapeces diagonāles ir savā starpā vienādas, tāpēc $MA = NL$. Līdzīgi pierāda, ka $MB = NK$ un $MC = KL$. Tātad trijstūris *NKL* ir meklējamais.

b) Ne vienmēr. Apskatīsim riņķa līnijā ar rādiusu *R* ievilktu vienādmalu trijstūri *ABC* un ņemsim *M* kā loka *BC* viduspunktu. Tad $MA = 2R$, $MB = R$, $MC = R$ (skat. 4.zīm.).

Tātad ***MB* + *MC* = *MA***. Bet mēs zinām, ka katrā trijstūri jebkuru divu malu summa ir **lielāka** par trešo malu. Tāpēc trijstūris, kura malu garumi būtu *MA*, *MB* un *MC*, nav iespējams.

8. Ar katru gājienu skudra pāriet uz citas krāsas lauciņu nekā tas, kurā tā atradās pirms gājiena. Tāpēc pēc 15 gājieniem skudra noteikti atradīsies uz **melnā** lauciņa.

Tālāk sekojošos zīmējumos parādīts, kā skudra var beigt savu ceļu melnajos lauciņos virs diagonāles *XY*. Risinājums lauciņiem zem diagonāles *XY* ir „simetrisks”.



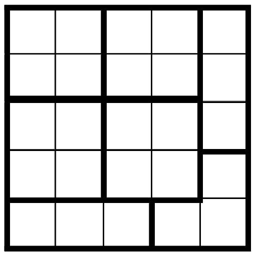
5.zīm.

9. Atbilde: 11 rūtiņas.

Risinājums. Tas, ka ar 11 rūtiņu izgriešanu pietiek, redzams 6.zīm.

		x		
x	x		x	x
		x		
x	x		x	x
		x		

6.zīm.



7zīm.

Lai pierādītu, ka ar mazāk rūtiņu izgriešanu nepietiek, skat. 7.zīm. Skaidrs, ka katrā apgabalā gar kvadrāta apakšējo un labo malu jāizgriež vismaz viena rūtiņa. Savukārt katrā 2×2 rūtiņu kvadrātā jāizgriež vismaz 2 rūtiņas; izgriežot tikai vienu, atlikušās 3 rūtiņas veidos „stūrīti”. Atliek ievērot, ka $1+1+1+8=11$.

10. Reizinot skaitli *n* ar 5, notiek sekojošais:

a) reizinot ciparu 0 ar 5, iegūst 0; pārnesuma nav;
b) reizinot ciparu 1 ar 5, iegūst 5; pārnesuma nav;
c) reizinot ciparu 2 ar 5, iegūst 10; rezultātā raksta 0, bet 1 pārnes uz nākošo šķiru. Tātad ciparu summā saskaitāmā „$2 \cdot 5$” vietā iekļaujas saskaitāmais 1; starpība starp tiem ir 9.

Redzam, ka $5n$ ciparu summa ir par $9 \cdot k$ mazāka nekā skaitlis $S \cdot 5$, kur *S* – skaitļa *n* ciparu summa, bet *k* – reizināšanā „5 reiz *n*” notikušo pārnesumu skaits.

Tātad $S \cdot 5 = 2009 + 9 \cdot k$ un $S = 402 + 2k - \frac{k+1}{5}$.

Tā kā *S* – naturāls skaitlis, tad $k+1$ jādalās ar 5. Tāpēc $k = 5t - 1$, *t* – naturāls, un $S = 402 + 2(5t-1) - t = 400 + 9t$, ja reizināšanā „5 reiz *n*” ir $5t-1$ pārnesumi. Tā kā katrs pārnesums notiek cipara 2 dēļ, tad *n* ciparu summa ir **400 + 9*t*, ja skaitlī *n* ir 5*t* – 1 divnieki, *t* – naturāls skaitlis.**

Piemēram, pie $t=1$ der $n = \underbrace{11...1}_{401}2222$; tad $5n = \underbrace{55...5}_{400}61110$. Līdzīgi konstruē piemērus pie *t* = 2; 3; ...; 402.

Tā kā skaitlī *n* ir $(400+9t) - 2(5t-1) = 402 - t$ vieninieku (un patvaļīgs skaits nuļļu), tad jābūt ***t* ≤ 402.**