„Profesora Cipariņa kluba” 3. nodarbība 2009./2010. mācību gadā
Uzdevumu īsi atrisinājumi.

1. Viegli pārbaudīt, ka $14538 \times 2 = 29076$. Tātad par meklējamajiem skaitļiem der, piemēram, 14538 un 29076.

2. Izmantosim sekojošu pakāpju īpašību. (Runāsim tikai par pakāpēm, kam gan bāze, gan kāpinātājs ir naturāli skaitļi, kas lielāki par 1.)
Ja kāpinātāji ir vienādi, tad lielāka tā pakāpe, kurai lielāka bāze.
Šī īpašība mums ļauj salīdzināt uzdevumā minētās pakāpes ar citām pakāpēm un rezultātā – arī savā starpā.
Vispirms atzīmēsim, ka $\mathbf{15^{15} < 16^{15}}$ (pēc īpašības, jo 15 < 16).
Tālāk ievērojam, ka $\mathbf{8^{20} < 9^{20}}$ (pēc īpašības, jo 8 < 9).
Skaitļus 16^{15} un 8^{20} salīdzināsim, izsakot tos abus kā divnieka pakāpes:

$$16^{15} = (2\cdot 2\cdot 2\cdot 2)^{15} = \underbrace{(2\cdot 2\cdot 2\cdot 2)\cdot(2\cdot 2\cdot 2\cdot 2)\cdot\ldots\cdot(2\cdot 2\cdot 2\cdot 2)}_{15\ \textit{reizes grupa}\ 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2} =$$

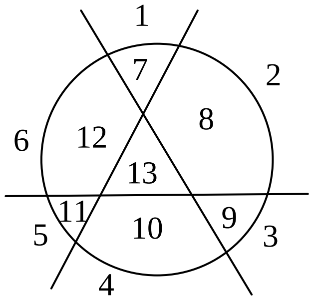
$$= \underbrace{2\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2}_{15\cdot 4\ \textit{reizes skaitlis}\ 2} = \underbrace{2\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2}_{60\ \textit{reizes skaitlis}\ 2} = \underbrace{(2\cdot 2\cdot 2)\cdot(2\cdot 2\cdot 2)\cdot\ldots\cdot(2\cdot 2\cdot 2)}_{20\ \textit{reizes grupa}\ 2\cdot 2\cdot 2} = \underbrace{8\cdot\ldots\cdot 8}_{20\ \textit{reizes skaitlis}\ 8} = 8^{20}.$$

Tātad $16^{15} = 8^{20}$, un iegūstam

$15^{15} < 16^{15} = 8^{20} < 9^{20}$, tātad $\mathbf{15^{15} < 9^{20}}$,

ko arī vajadzēja noskaidrot.

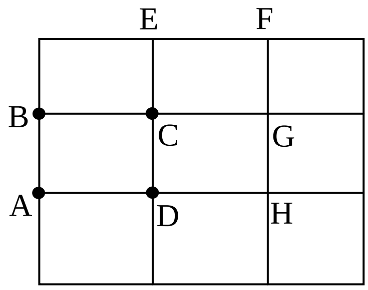
3. Atceramies, ka divām taisnēm ir vai nu viens, vai neviens kopējs punkts. Novelkot vienu taisni, tā sadala plakni 2 apgabalos. Novelkot vēl otru taisni, uz tās rodas vai nu neviens, vai viens krustpunkts ar pirmo; tātad otrā taisne vai nu sadalās divos gabalos (staros), vai arī paliek kā viens nedalīts gabals. Katrs no šiem gabaliem sadala vienu no pirmās taisnes veidotajiem apgabaliem divos jaunos apgabalos; tātad apgabalu skaits aug par 2 vai 1, un tas ir 4 vai 3.
Līdzīgi, novelkot trešo taisni, tā ar jau novilktajām taisnēm sadalās 3, 2 vai 1 gabalā (atkarībā no tā, vai uz tās rodas 2, 1 vai neviens krustpunkts). Katrs gabals sadala vienu no divu taišņu veidotajiem apgabaliem divos jaunos. Tātad apgabalu skaits palielinās par 3, 2 vai 1 un tātad nav lielāks par 4 + 3 = 7.
Novelkot riņķa līniju, uz tās rodas ne vairāk par 6 kopīgiem punktiem ar kādu no 3 taisnēm (ne vairāk par diviem ar katru). Tātad riņķa līnija sadalās ne vairāk kā 6 lokos. Katrs loks sadala kādu no triju taišņu veidotajiem apgabaliem divos jaunos apgabalos; tātad apgabalu skaits palielinās ne vairāk kā par 6, un tas nevar būt lielāks par 7 + 6 = 13.
Tas, ka 13 apgabali ir iespējami, redzams 1.zīm.



1.zīm.

4. **Atbilde:** vidējā taisnstūra perimetrs var būt jebkurš pozitīvs skaitlis, kas mazāks par 3, un nevar būt citāds.

Risinājums. Tā kā perimetrs (četru malu garumu summa) vienmēr ir pozitīvs, tad tas nevar būt ne 0, ne negatīvs. Pierādīsim, ka tas noteikti mazāks par 3.



2.zīm.

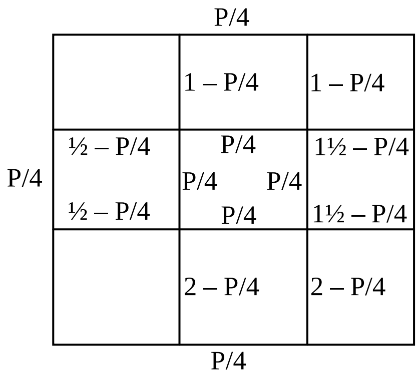
Saskaņā ar doto $AB + BC + CD + DA = 1$. Tā kā $AB = CD$ un $BC = DA$, iegūstam $2 \cdot CD + 2 \cdot BC = 1$ un $CD = \frac{1}{2} - BC$. Tā kā $BC > 0$, tad $CD < \frac{1}{2}$; tāpēc arī $\boldsymbol{GH < \frac{1}{2}}$ (jo taisnstūra pretējās malas ir vienādas).

Līdzīgi no $CE + EF + FG + GC = 2$ iegūstam, ka **CG < 1** un tāpēc arī **DH < 1**. No izceltajām nevienādībām seko, ka vidējā taisnstūra perimetrs ir mazāks par $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 + 1 = 3$, kas arī bija jāpierāda.

Tagad pierādīsim uzdevuma otro daļu – pierādīsim, ka katrs skaitlis *P*, kas apmierina sakarību 0 < *P* < 3, atbilstoši izveidotā zīmējumā **var būt** vidējā taisnstūra perimetrs.

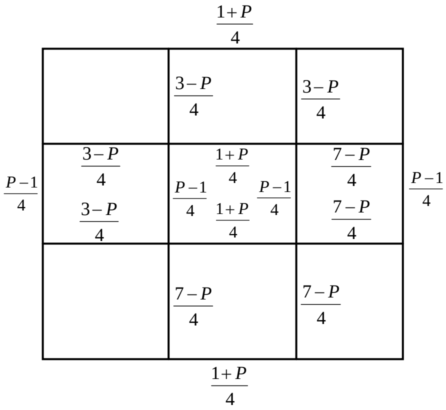
Mēs šķirojam divus gadījumus:

I Skaitlis *P* apmierina sakarību 0 < *P* < 2. Vajadzīgais taisnstūris redzams 3.zīm.



3.zīm.

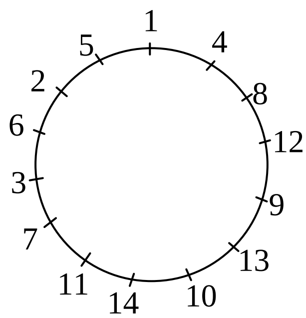
II Skaitlis *P* apmierina sakarību $2 \le P < 3$. Tad iepriekšējā konstrukcija neder, jo $\frac{1}{2} - P/4 \le 0$, kas nedrīkst būt. Tādā gadījumā veidojam 4.zīm.



4.zīm.

Lasītājs pats var pārbaudīt, ka visi uzdevuma nosacījumi apmierināti. Iespējami arī daudzi citi piemēri.

5. Skat., piem., 5.zīm.



5.zīm.

6. Tā var sadalīt **jebkurus 8** pēc kārtas ņemtus naturālus skaitļus. Tiešām, apzīmēsim tos ar $x + 1$; $x + 2$; $x + 3$; ...; $x + 7$; $x + 8$ un izveidosim grupas A un B:

***A* grupa:** $x + 1$; $x + 4$; $x + 6$; $x + 7$;

***B* grupa:** $x + 2$; $x + 3$; $x + 5$; $x + 8$.

Grupas A skaitļu summa ir $(x+1)+(x+4)+(x+6)+(x+7)=4x+(1+4+6+7)=$ $=4x+18$, bet grupas B skaitļu summa ir $(x+2)+(x+3)+(x+5)+(x+8)=$ $=4x+(2+3+5+8)=4x+18$; tātad tās ir vienādas.

Savukārt grupas A skaitļu kvadrātu summa ir

$$(x+1)^2+(x+4)^2+(x+6)^2+(x+7)^2=$$
$$=(x^2+2x+1)+(x^2+8x+16)+(x^2+12x+36)+(x^2+14x+49)=$$
$$=4x^2+36x+102,$$

bet grupas B skaitļu kvadrātu summa ir

$$(x+2)^2+(x+3)^2+(x+5)^2+(x+8)^2=$$
$$=(x^2+4x+4)+(x^2+6x+9)+(x^2+10x+25)+(x^2+16x+64)=$$
$$=4x^2+36x+102,$$

tātad arī tās ir vienādas.

Ja skaitļi $x + 1$; ...; $x + 8$ ir attiecīgi 2002; ...; 2009, tad tie atbilstoši augstāk minētajam algoritmam tiek sadalīti grupās (2002; 2005; 2007; 2008) un (2003; 2004; 2006; 2009).

Iesakām lasītājam pamēģināt patstāvīgi pierādīt, ka jebkurus 16 pēc kārtas ņemtus naturālus skaitļus var sadalīt divās grupās tā, lai būtu vienādas gan grupās ietilpstošo skaitļu summas, gan to kvadrātu summas, gan to kubu summas. Vai šo rezultātu nevar „attīstīt” vēl tālāk?

7. Lai naturāls skaitlis dalītos ar 33, tam jādalās ar 3 un ar 11.
Atceramies dalāmības pazīmes ar 3 un ar 11:

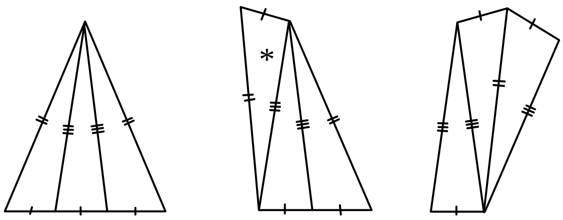
- ar 3 dalās tie un tikai tie naturālie skaitļi, kuru ciparu summa dalās ar 3;
- ar 11 dalās tie un tikai tie naturālie skaitļi, kam starpība starp nepāra vietās esošo ciparu summu un pāra vietās esošo ciparu summu dalās ar 11. Piemēram, 3476 dalās ar 11, jo $(3+7)-(4+6)=0$ dalās ar 11, bet 82603 nedalās ar 11, jo $(8+6+3)-(2+0)=17-5=15$ nedalās ar 11.

Piemērs 1111110000 parāda, ka meklējamā skaitļa ciparu summa **var būt 6**. No minētās dalāmības pazīmes seko, ka tai jādalās ar 3; tātad, ja tā varētu būt mazāka par 6, tad tai jābūt 3. Pierādīsim, ka tas nav iespējams.
Pieņemsim no pretējā, ka eksistē tāds desmitciparu naturāls skaitlis, kam ciparu summa ir 3 un kas dalās gan ar 3, gan ar 11. Acīmredzot, pastāv tikai 3 iespējas:

a) skaitlī ir viens (pirmais) cipars 3 un deviņas nulles,
b) skaitlī ir viens cipars 1, viens cipars 2 un astoņas nulles,
c) skaitlī ir trīs cipari 1 un septiņas nulles.

Viegli pārbaudīt, ka nevienā no šiem gadījumiem starpība starp nepāra vietās esošo ciparu summu *n* un pāra vietās esošo ciparu summu *p* nevar dalīties ar 11. Tiešām, a) gadījumā šī starpība ir 3 – 0 vai 0 – 3, b) gadījumā 1 – 2; 2 – 1; 3 – 0 vai 0 – 3, c) gadījumā $(1+1+1)-0$; $0-(1+1+1)$; $(1+1)-1$ vai $1-(1+1)$. Neviena no šīm vērtībām nedalās ar 11. Tātad mūsu pieņēmums nepareizs, un naturāla skaitļa ar ciparu summu 3, kas dalītos ar 33, nav. Tātad mazākā iespējamā ciparu summa desmitciparu naturālam skaitlim, kurš dalās ar 33, ir 6.

8. Tādas situācijas piemērs redzams 6.zīm. Trijstūris, kas apzīmēts ar zvaigznīti, ir „apgriezts uz mutes”.



6.zīm.

9. Apzīmēsim monētu masas no labās uz kreiso pusi ar m_1, m_2, ..., m_{10}. Ar šiem pašiem burtiem apzīmēsim arī pašas monētas. Mēs zinām, ka ir tāds indekss *n*, ka monētas m_1, m_2, ..., m_n katra sver 8 gramus (sauksim tās par smagām), bet pārējās monētas m_{n+1}, ..., m_{10} katra svar 7 gramus (sauksim tās par vieglām). Mums jāatrod *n* vērtība.
Pirmajā svēršanā novietojam m_1 un m_{10} uz viena kausa, bet m_4 un m_7 – uz otra. Atceramies, ka m_1 noteikti ir smaga, bet m_{10} noteikti ir viegla. Šķirojam trīs iespējas.

A. Izrādās, ka $m_1 + m_{10} > m_4 + m_7$. Tas var notikt tikai tad, ja m_4 un m_7 abas ir vieglas. Tad vieglas ir arī monētas m_5, m_6, ..., m_9; tātad vienīgās vēl nenoskaidrotās monētas ir m_2 un m_3. Otrajā svēršanā uz viena kausa atstājam m_1 un m_{10} (smago un vieglo), bet uz otra novietojam m_2 un m_3. Ja $m_1 + m_{10} > m_2 + m_3$, tad m_2 un m_3 abas ir vieglas. Ja $m_1 + m_{10} = m_2 + m_3$, tad

m_2 ir smaga, bet m_3 ir viegla. Ja $m_1 + m_{10} < m_2 + m_3$, tad m_2 un m_3 abas ir smagas.

B. Izrādās, ka $m_1 + m_{10} < m_4 + m_7$. Tad m_4 un m_7 abas ir smagas, un šis gadījums ir „simetrisks” A gadījumam; atstājam to lasītājam izanalizēt patstāvīgi.

C. Izrādās, ka $m_1 + m_{10} = m_4 + m_7$. Tad m_4 ir smaga, bet m_7 ir viegla; vienīgās vēl nenoskaidrotās monētas ir m_5 un m_6. Otrajā svēršanā uz viena kausa atstājam m_1 un m_{10}, bet uz otra novietojam m_5 un m_6. Triju iespējamo gadījumu analīze ir analoģiska A gadījumā parādītajai.

10. Jūsu vēstules ar 2010.gada tematikai veltītajiem uzdevumiem vēl turpina pienākt. Labākos iesūtītos uzdevumus publicēsim vēlāk.