„Profesora Cipariņa kluba” 4. nodarbība 2009./2010. mācību gadā
Uzdevumu īsi atrisinājumi.

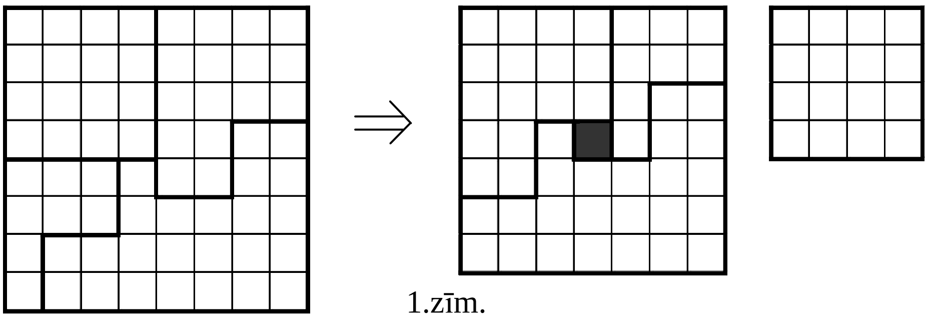
1. a) ievērojam, ka $n^2 - n = n(n-1)$. Ja n – naturāls skaitlis, tad n un n – 1 ir divi viens otram sekojoši veseli skaitļi. Tāpēc viens no tiem ir pāra, bet otrs – nepāra. Pāra skaitļa un nepāra skaitļa reizinājums ir pāra skaitlis. No tā arī seko vajadzīgais.
b) ievērojam, ka $n^3 - n = n(n^2-1) = n\cdot[(n-1)(n+1)] = (n-1)\cdot n\cdot(n+1)$. Ja n – naturāls skaitlis, tad n – 1; n; n + 1 ir **trīs viens otram sekojoši veseli skaitļi.** Tāpēc tieši viens no tiem dalās ar 3 (jo veselo skaitļu virknē katrs trešais skaitlis dalās ar 3). Tāpēc arī to reizinājums dalās ar 3.
Piezīme. Abi minētie apgalvojumi ir ļoti slavenas teorēmas speciālgadījumi.
Fermā mazā teorēma. Ja p – pirmskaitlis un n – naturāls skaitlis, tad $n^p - n$ dalās ar p.
Pamēģiniet patstāvīgi pierādīt šo teorēmu, ja p = 5 un p = 7.

2. Jā, var. Piemēram, $96432\cdot 1875 = 180810000$.

3. Atbilde: nē, nevar.
Pierādījums. Pieņemsim, ka naturāla skaitļa n pierakstā kāds no cipariem ir 2. Apskatīsim citu naturālu skaitli n_1, kas no n atšķiras **vienīgi** ar to, ka šī cipara 2 vietā skaitlī n_1 ir cipars 1.
Piemēram, ja n = 13**2**4, tad n_1 = 13**1**4; ja n = 24**2**5 un mēs apskatām otro divnieku n pierakstā, tad n_1 = 24**1**5.
Skaidrs, ka $n_1 < n$. Tātad, ja Jānītis uzraksta skaitli n, tad jau iepriekš viņš uzrakstījis skaitli n_1. Tātad **pirms** katra cipara 2 ir uzrakstīts tam atbilstošais cipars 1. Tāpēc divnieku nekad nevar būt uzrakstīts vairāk nekā vieninieku.

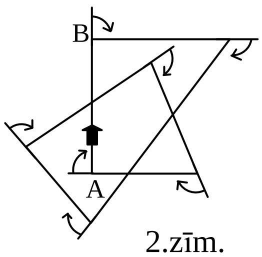
4. Nevienādību var pārveidot par tai līdzvērtīgu (ekvivalentu):
$$(a-c)(x-y)+(b-c)(y-x) > 0.$$
Šīs nevienādības pareizība ir acīmredzama, jo $a-c>0$, $x-y>0$, $b-c>0$ un $y-z>0$.

5. Skat., piem., 1.zīm.



1.zīm.

6. Novietosim uz posma AB bultiņu un bīdīsim to pa lauzto līniju, stūros pagriežoties, kamēr būsim veikuši vienu pilnu „apli” (skat. 2.zīm.).



2.zīm.

Izsekojot bultiņas kustībai, redzam, ka tā kopā pagriezusies par $2 \cdot 360° = 720°$ pulksteņa rādītāja kustības virzienā. Tātad, ja bultiņas pagrieziena leņķus apzīmējam ar α_1; α_2; ...; α_7, tad $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_7 = 720°$. Tāpēc mūsu apskatāmo lauztās līnijas veidoto leņķu lielumu summa ir:

$$(180° - \alpha_1) + (180° - \alpha_2) + ... + (180° - \alpha_7) = 7 \cdot 180° - (\alpha_1 + ... + \alpha_2) =$$
$$= 7 \cdot 180° - 4 \cdot 180° = 3 \cdot 180° = 540°.$$

7. Katram iespējama bioloģijas pulciņam *B* atbilst iespējamais matemātikas pulciņš *M*, kas satur tieši tos skolniekus, kas nav iesaistīti pulciņā *B*. Pie tam skaidrs, ka dažādiem *B* atbilst dažādi *M*. Tāpēc bioloģijas pulciņus var izveidot tikpat daudz, cik matemātikas pulciņus.

8. Tā kā abu pirmo kvadrātu malu garumi ir 1 un katru nākošo kvadrātu, sākot ar trešo, zīmē blakus abiem iepriekšējiem, tad kvadrātu malu garumi ir Fibonači skaitļi F_1; F_2; ...; F_n; F_{n+1}; F_{n+2}; ... . Tāpēc visu *n* pirmo kvadrātu kopīgais laukums ir $F_1^2 + F_2^2 + ... + F_n^2$.

Šie *n* kvadrāti kopā veido taisnstūri, kam vienas malas garums ir F_n, bet otras malas garums ir $F_{n-1} + F_n = F_{n+1}$ (pie $n \geq 2$).

Iegūstam, ka pie $n \geq 2$ pastāv vienādība

$$F_1^2 + F_2^2 + ... + F_n^2 = F_n \cdot F_{n+1} \qquad (n \geq 2).$$

9. Pieņemsim, ka naturālam skaitlim *n* ir *k* naturāli dalītāji; apzīmēsim tos augošā secībā ar $d_1 < d_2 < ... < d_k$ (tātad $d_1 = 1$ un $d_k = n$). Ja *d* – jebkurš no šiem dalītājiem, tad $\frac{n}{d}$ ir naturāls skaitlis (saskaņā ar dalītāja definīciju); apzīmēsim $\frac{n}{d} = e$. Tad $n = d \cdot e$ un tātad $\frac{n}{e} = d$; tā kā *d* – naturāls skaitlis, tad arī *e* ir skaitļa *n* dalītājs. Tāpēc *k* skaitļi $\frac{n}{d_1}$, $\frac{n}{d_2}$, ..., $\frac{n}{d_k}$ visi ir skaitļa *n* naturāli dalītāji.

Tā kā $\frac{n}{d_1} > \frac{n}{d_2} > ... > \frac{n}{d_k}$, tad tie visi ir **dažādi**; tātad to skaits ir *k*. Bet mēs zinām, ka skaitlim ir **tieši** *k* naturāli dalītāji, un tie ir $d_1; d_2; ...; d_k$.

Tātad skaitļi $\frac{n}{d_1}$; $\frac{n}{d_2}$; ...; $\frac{n}{d_k}$ ir tie paši skaitļi $d_1; d_2; ...; d_k$ (tikai izvietoti dilstošā secībā). Tāpēc skaidrs, ka

$$d_1 + d_2 + ... + d_k = \frac{n}{d_1} + ... + \frac{n}{d_k},$$

jo summa nav atkarīga no saskaitāmo kārtības.

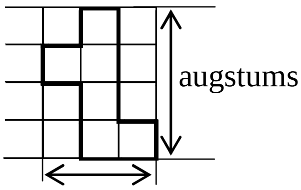
10. Atbilde: a) nevar, **b)** 24.

Risinājums. a) iedomāsimies, ka skudra rāpo pa daudzstūra kontūru, veicot **vienu pilnu „apli”**. Kustības laikā skudra tikpat garu ceļu gabalu norāpojusi „pa labi”, cik „pa kreisi”, un tikpat garu ceļa gabalu norāpojusi „uz augšu”, cik „uz leju” (jo beigās atrodas turpat, kur sākumā). Tāpēc skudras horizontālā virzienā norāpotais attālums izsakās ar pāra skaitli; tāpat ar pāra skaitli izsakās vertikālā virzienā norāpotais attālums. Tāpēc arī kopējais norāpotais attālums izsakās ar pāra skaitli. Bet 101 nav pāra skaitlis.

b) pierādīsim: ja apskatāmā tipa daudzstūra perimetrs ir n, tad tā laukums ir $\frac{n}{2}-1$.

Ja daudzstūris sastāv no vienas rūtiņas, tad $n = 4$ un tā laukums ir 1; viegli pārbaudīt, ka $\frac{4}{2}-1=1$.

Pieņemsim, ka dažiem daudzstūriem šī sakarība nav spēkā, un apskatīsim vienu no šādiem daudzstūriem ar vismazāko laukumu; tad šis laukums ir lielāks par 1, jo vienīgais daudzstūris ar laukumu 1 ir viena rūtiņa. Tātad vai nu mūsu daudzstūra „platums”, vai tā „augstums” ir vismaz 2 (skat. 3.zīm.).



3.zīm.

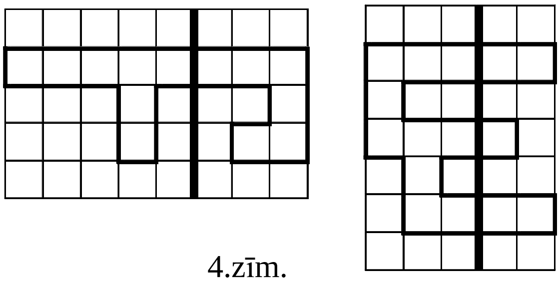
Varam pieņemt, ka „platums” ir vismaz 2.

Novelkam vertikālu rūtiņu līniju, kas atrodas starp „kreiso” un „labo” malu (tātad eksistē, jo apskatāmā daudzstūra platums ir vismaz 2). Šī līnija krusto daudzstūri. Tā kā daudzstūra iekšpusē nav rūtiņu virsotņu, tad šī krustošana notiek pa vienu vai vairākiem nogriežņiem ar garumu 1 (skat. 4.zīm.). Izvēlamies **vienu** no šiem nogriežņiem. Tas sadala mūsu apskatāmo daudzstūri divos daudzstūros, kuru laukumi ir mazāki nekā sākotnējam. Apzīmējam šo daudzstūru laukumus attiecīgi ar L_1 un L_2, bet perimetrus attiecīgi ar P_1 un P_2 (skat. 5.zīm.).

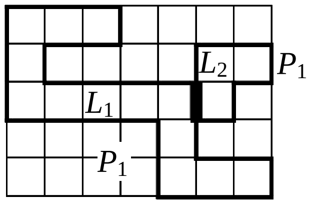
Saskaņā ar pieņēmumu par sākotnējā daudzstūra laukumu $L_1=\frac{P_1}{2}-1$ un $L_1=\frac{P_2}{2}-1$.

Tāpēc sākotnējā daudzstūra laukums $L=L_1+L_2=\frac{P_1}{2}-1+\frac{P_2}{2}-1=\frac{P_1+P_2-2}{2}-1$.

Bet P_1+P_2-2 ir sākotnējā daudzstūra perimetrs P (no P_1 un P_2 „jāatskaita” kopīgais nogrieznis ar garumu 1, kas atrodas sākotnējā daudzstūra iekšpusē). Iznāk, ka $L=\frac{P}{2}-1$. Tā ir pretruna ar pieņēmumu, ka sākotnējam daudzstūrim mūsu pierādāmā sakarība neizpildās. Tātad pieņēmums ir nepareizs, un šī sakarība izpildās visiem apskatāmā tipa daudzstūriem.



4.zīm.



5.zīm.