„Profesora Cipariņa kluba” 5. nodarbība 2009./2010. mācību gadā

Uzdevumu īsi atrisinājumi.

1. Risinājums balstīsies uz šādu labi zināmu īpašību: ja gan *a*, gan *b* abi dalās ar *n*, tad arī starpība $a-b$ dalās ar *n*.

Pieņemsim, ka *n* – kaut kāds naturāls skaitlis, ar kuru dalās gan 1517, gan 1147. Izmantojot augšminēto īpašību, pakāpeniski iegūstam, ka ar *n* dalās skaitļi

1517 – 1147 = 370;
1147 – 370 = 777;
777 – 370 = 407;
407 – 370 = 37.

Viegli pārbaudīt, ka no naturāliem skaitļiem 37 dalās tikai ar 1 un ar 37. Tātad *n* var būt vai nu 1, vai 37. Skaidrs, ka $37>1$. Pārbaudām, vai 1517 un 1147 dalās ar 37:

1517 : 37 = 41;
1147 : 37 = 31.

Tātad mūsu meklējamais skaitlis ir 37.

2. Sadalām visas lapas rūtiņas četrās grupās *A*; *B*; *C*; *D*, kā parādīts 1.zīm.

...

	A	B	A	B	
	D	C	D	C	
...	A	B	A	B	...
	D	C	D	C	

...

1.zīm.

Katra melnā rūtiņa pieder vienai no šīm četrām grupām. Ja nevienā grupā nebūtu vairāk par 14 melnajām rūtiņām, tad to kopskaits nepārsniegtu $14\cdot 4=56$; bet mēs zinām, ka melno rūtiņu pavisam ir 57. Tātad kādā no četrām grupām ir vairāk nekā 14 melno rūtiņu; tātad tajā ir **vismaz 15** melno rūtiņu. Atliek ievērot, ka nekādām divām rūtiņām no vienas grupas nav ne kopīgas malas, ne kopīga stūra.

3. Atbilde: ar 7 dienām.

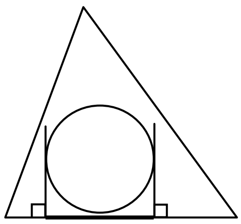
Risinājums. a) tā kā katrai komandai jāspēlē ar 7 citām, tad pat katrai komandai vienai pašai nepieciešamas **vismaz** 7 dienas;

b) to, kā var iztikt ar 7 dienām, skat. 2.zīm. Komandas ir apzīmētas ar burtiem no *A* līdz *H*. Katrā rūtiņā ierakstītais skaitlis norāda, kurā dienā savā starpā spēlē komandas, kas atbilst šīs rūtiņas rindiņai un kolonnai.

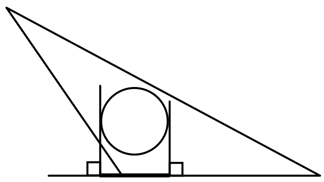
	A	B	C	D	E	F	G	H
A		7	6	5	4	3	2	1
B	7		5	4	3	2	1	6
C	6	5		3	2	1	7	4
D	5	4	3		1	7	6	2
E	4	3	2	1		6	5	7
F	3	2	1	7	6		4	5
G	2	1	7	6	5	4		3
H	1	6	4	2	7	5	3	

2.zīm.

4. Projicējam riņķa līniju uz malu ar garumu 10. Projekcijas garums vienāds ar tās diametra garumu. **Tā kā trijstūris ir šaurleņķu, tad projekcija atrodas malas iekšpusē, kā parādīts 3.zīm.** (varētu gadīties, ka tā nav, ja trijstūris būtu platleņķa; skat., piem., 4.zīm.). Tātad riņķa līnijas diametrs ir īsāks par 10; tāpēc tās rādiuss ir īsāks par $\frac{10}{2}=5$, k.b.j.



3.zīm.



4.zīm.

5. Virknei *a b a c a b a* galā pierakstot jebkuru no burtiem *a*; *b*; *c*, iegūst stabilu virkni:

$\underline{a}\ b\ a\ c\ a\ b\ a\ \underline{a}$
$\underline{a\ b}\ a\ c\ a\ b\ \underline{a\ b}$
$\underline{a\ b\ a\ c}\ \underline{a\ b\ a\ c}$

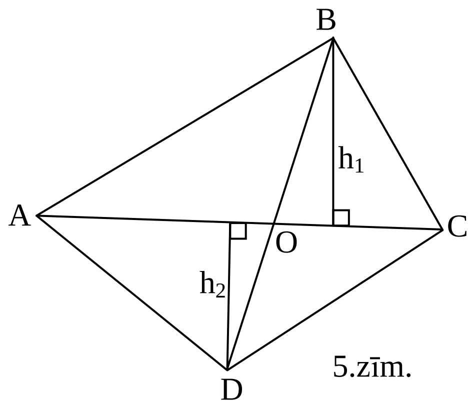
Lasītājs pats var pārbaudīt, ka burtu *a*; *b*; *c*; *d*; *e* gadījumam der, piemēram, virkne

a b a c a b a d a b a c a b a e a b a c a b a d a b a c a b a .

Padomājiet, vai līdzīgas virknes var izveidot, ja tām galā būtu jāpieraksta jebkurš no sešiem, septiņiem u.t.t. burtiem.

6. Atbilde: nē.

Risinājums. Trijstūra *XYZ* laukumu apzīmēsim ar $L(XYZ)$, ja *X*, *Y*, *Z* – patvaļīgi punkti, kas neatrodas uz vienas taisnes (pretējā gadījumā *XYZ* nav trijstūris).



5.zīm.

Četri trijstūri, par kuriem runā uzdevumā, ir *AOB*, *BOC*, *COD* un *DOA*. Novelkam ΔAOB un ΔBOC kopīgo augstumu h_1, kā arī ΔCOD un ΔDOA kopējo augstumu h_2 (skat. 5.zīm.).

Tad $L(AOB) = \frac{1}{2} AO \cdot h_1$

$L(BOC) = \frac{1}{2} CO \cdot h_1$ (1)

$L(COD) = \frac{1}{2} CO \cdot h_2$

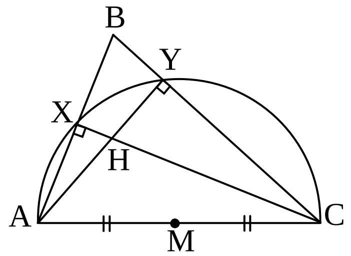
$L(DOA) = \frac{1}{2} DO \cdot h_2$

No vienādībām (1) viegli pārbaudīt, ka

$L(AOB) \cdot L(COD) = L(BOC) \cdot L(AOD)$ (2)

Bet vienādība $a \cdot b = c \cdot d$, kur *a*; *b*; *c*; *d* – **dažādi** pirmskaitļi, nevar pastāvēt: kreisā puse dalās ar *a*, bet labās puses vienīgie naturālie dalītāji ir 1; *c*; *d*; *cd*.

7. Iedomāsimies, ka *AY* un *CX* ir divi no meklējamiem augstumiem. Tad ΔAXC un ΔAYC ir taisnleņķa. Kā zināms, taisnleņķa trijstūrī mediāna pret hipotenūzu ir tikpat gara, cik puse no hipotenūzas; tāpēc $MA = MX = MY = MC$. Tātad, novelkot riņķa līniju ar centru *M* un rādiusu *MA*, tās krustpunkti ar malām *AB* un *CB* ir augstumu pamati.



6.zīm.

Varam uzzīmēt augstumus *AY* un *CX* un atrast to krustpunktu *H*. Tā kā trijstūra augstumi krustojas vienā punktā, tad, velkot taisni caur *B* un *H*, iegūstam arī trešo augstumu no virsotnes *B*.

8. Lasītājs, atverot iekavas, pats var pārbaudīt, ka pastāv identitāte

$$\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)\left(x^2+y^2+z^2+t^2\right)=$$
$$=\left(ax-by-cz-dt\right)^2+\left(bx+ay-dz+ct\right)^2+\left(cx+dy+az-bt\right)^2+\left(dx-cy+bz+at\right)^2.$$

Šo vienādību sauc par Lagranža identitāti.

9. Vispirms aprēķināsim tabulas elementu summu pa rindiņām. Pirmās rindiņas skaitļu summu 1 + 2 + 3 + ... + n apzīmēsim ar S. Tad otrās rindiņas skaitļu summa ir $2(1+2+...+n)=2S$, trešās rindiņas skaitļu summa ir 3S, ..., n-tās rindiņas skaitļu summa ir $n(1+2+...+n)=n\cdot S$. Saskaitot visas šīs summas kopā, iegūstam: tabulas visu skaitļu summa ir

$$S+2S+3S+...+(n-1)S+n\cdot S=(1+2+...+n)\cdot S=S\cdot S=S^2.$$

Tagad aprēķināsim tabulas elementu summu, grupējot tos „pa stūrīšiem” (skat. 7.zīm.).

	1 · 1	1 · 2	1 · 3	...	1 · (n – 1)	1 · n
(α)	2 · 1	2 · 2	2 · 3	...	2 · (n – 1)	2 · n
(β)	3 · 1	3 · 2	3 · 3	...	3 · (n – 1)	3 · n
	...	...	...	...	...	...
	n · 1	n · 2	n · 3	...	n · (n – 1)	n · n

Kreisajā augšējā stūrī esošo skaitli $1\cdot 1$ varam uzrakstīt kā 1^3 (jo $1\cdot 1=1=1^3$).

„Stūrītī” α skaitļu summa ir

$$2\cdot 1+2\cdot 2+1\cdot 2=2\cdot(1+2+1)=2\cdot 4=2\cdot 2^2=2^3$$

„Stūrītī” β skaitļu summa ir

$$3\cdot 1+3\cdot 2+3\cdot 3+2\cdot 3+1\cdot 3=3\cdot(1+2+3+2+1)=3\cdot 9=3\cdot 3^2=3^3$$

Līdzīgi „stūrīti”, kurā kreisais elements ir $k\cdot 1$ (k – patvaļīgs naturāls skaitlis, kas nepārsniedz n), skaitļu summa ir

$$\begin{aligned} S_k &= k\cdot 1+k\cdot 2+...+ \\ &+k\cdot(k-2)+k\cdot(k-1)+k\cdot k+(k-1)\cdot k+(k-2)\cdot k+...+ \\ &+3\cdot k+2\cdot k+1\cdot k= \\ &=k[\,\underline{1+2+...+(k-2)+(k-1)}+k+\underline{(k-1)+(k-2)+...+2+1}\,]. \end{aligned}$$

Pasvītroto apgabalu skaitļus apvienojam pa pāriem:

$$1+(k-1)=k,\ 2+(k-2)=k,\ ...,\ (k-2)+2=k,\ (k-1)+1=k.$$

Pavisam šādu pāru ir $(k-1)$.

Tātad $S_k=k[(k-1)k+k]=k[k^2-k+k]=k\cdot k^2=k^3$.

Tāpēc visos stūrīšos kopā ierakstīto skaitļu summa ir

$$1^3+2^3+3^3+...+k^3+...+(n-1)^3+n^3.$$

Aprēķinot tabulā ierakstīto skaitļu summu divos dažādos veidos, rezultātiem jābūt vienādiem, jo aprēķina vienu un to pašu lielumu. No tā arī izriet vajadzīgā vienādība.

10. Atcerēsimies, ka latviešu alfabēta sākums ir

a, *ā*, *b*, *c*, *č*, *d*, *e*, ...

Andris var uzdot Maijai, piemēram, šādu jautājumu:

„Vai taisnība, ka Tavs burts alfabētā atrodas aiz manis iedomātā burta, kas ir vai nu *b*, vai *d*?”

- Ja Maija iedomājusies „*a*”, viņas atbilde būs „nē”. Tiešām, *a* neatrodas ne aiz *b*, ne aiz *d*.

- Ja Maija iedomājusies „*e*”, viņas atbilde būs „jā”. Tiešām, *e* atrodas gan aiz *b*, gan aiz *d*.
- Ja Maija iedomājusies „*c*”, viņas atbilde būs „nezinu un nevaru zināt”. Tiešām, burts *c* atrodas **aiz** *b*, bet **pirms** *d*, un Maija nezina, kuru no burtiem *b* un *d* Andris ir iedomājies.

Tātad atkarībā no Maijas atbildes, Andris sapratīs, kuru no burtiem *a*; *c*; *e* Maija ir iedomājusies.