„Profesora Cipariņa kluba” 1. nodarbība 2010./2011. mācību gadā
Uzdevumu īsi atrisinājumi.

1. Atbilde: Jā, to var izdarīt.

Risinājums: Pārveidosim summu par $\overline{ES}\cdot 4=\overline{TE}$ (apzīmējums $\overline{ES}$ norāda, ka skaitļa pirmais cipars ir *E*, bet otrais – *S*; līdzīgi arī apzīmējums $\overline{TE}$ nozīmē, ka skaitļa pirmais cipars ir *T*, bet otrais - *E*). Tā kā *E* ir reizinājuma $4\cdot S$ pēdējais cipars un $4\cdot S$ ir pāra skaitlis, tad *E* ir pāra cipars. Turklāt tas nedrīkst būt lielāks par 2, jo pretējā gadījumā $4\cdot\overline{ES}\geq 4\cdot 30>100$ būtu trīsciparu skaitlis. Turklāt $E\neq 0$, jo skaitļa pirmais cipars nevar būt 0. Tātad *E* ir 2. Tā kā reizinājuma $4\cdot S$ vienu cipars ir 2, tad *S* var būt 3 vai 8. Ja *S* ir 8, tad reizinājums $4\cdot 28$ ir trīsciparu skaitlis, tāpēc *S* ir 3. Esam ieguvuši, ka $E=2$, $S=3$ un $T=9$.

2. Apzīmēsim centrālajā rūtiņā esošo skaitli ar *x* (skat. 1.zīm.). Tā kā katrā diagonālē jau esošo skaitļu summa ir 20, katras diagonāles un arī katras kolonnas un rindas visu skaitļu summa ir $x+20$.

7		8
	x	
12		13

1.zīm.

No tā seko, ka pirmajā rindā trūkstošais skaitlis ir $x+20-(7+8)=x+5$, savukārt trešajā rindā trūkstošais skaitlis ir $x+20-(12+13)=x-5$. Tātad vidējā kolonnā visu skaitļu summa ir $(x+5)+x+(x=5)=3x$. Bet tam ir jābūt vienādam ar $x+20$, no kurienes seko, ka $x=10$. Tātad katrā diagonālē, kolonnā un rindā visu ierakstīto skaitļu summa ir 30, no kā iegūstam 2.zīm. redzamo aizpildīto maģisko kvadrātu.

7	**15**	8
11	**10**	**9**
12	**5**	13

2.zīm.

3. Skaidrs, ka nav viencipara „neveiksmīga” skaitļa.

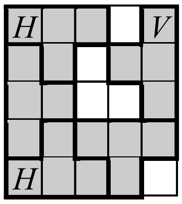
Apskatīsim „neveiksmīgu” divciparu skaitli $\overline{ab}$ (šis apzīmējums norāda, ka skaitļa pirmais cipars ir *a*, bet otrais – *b*).

Ja skaitļa cipari apzīmēti ar *a* un *b*, varam skaitli uzrakstīt formā $\overline{ab}=10a+b$. No „neveiksmīga” skaitļa definīcijas iegūstam, ka $10a+b=13(a+b)\Rightarrow 3a+12b=0$. Tā kā $a>0$ un $b\geq 0$, šim vienādojumam nav atrisinājuma. Tāpēc neeksistē „neveiksmīgs” divciparu skaitlis.

Apskatīsim „neveiksmīgu” trīsciparu skaitli $\overline{abc}=100a+10b+c$. Līdzīgi kā iepriekš iegūstam vienādojumu $100a+10b+c=13(a+b+c)$. Veicot ekvivalentus pārveidojumus, iegūstam $29a=b+4c$. Ievērojam, ka *a* noteikti ir 1, jo pretējā gadījumā $29a\geq 29\cdot 2=58$, bet vienādojuma labā puses lielākā iespējamā vērtība ir $b+4c=9+4\cdot 9=45$. Ievietojam $a=1$ iegūtajā vienādojumā un iegūstam $b+4c=29$. Pakāpeniski apskatot pēc kārtas visus iespējamos viencipara skaitļus, secinām, ka vienīgie šī vienādojuma atrisinājumi ir $b=1$ un $c=7$, $b=5$ un $c=6$, $b=9$ un $c=5$. Tātad vienīgie trīsciparu „neveiksmīgie” skaitļi ir 117, 156 un 195.

Apskatīsim, vai eksistē kāds „neveiksmīgs” četrciparu skaitlis. Līdzīgi kā iepriekš iegūstam vienādojumu $1000a + 100b + 10c + d = 13(a + b + c + d)$. Mazākā vienādojuma kreisās puses vērtība ir 1000, bet labās puses lielākā iespējamā vērtība ir $13 \cdot 36 = 468$. Tāpēc nav „neveiksmīgu” četrciparu skaitļu. Līdzīgi neeksistē piecciparu, sešciparu u.t.t. „neveiksmīgi” skaitļi.
Tātad vienīgie „neveiksmīgie” skaitļi ir 117, 156 un 195.

4. Lielākais T-veida figūru skaits, kuras var ievietot 5x5 rūtiņu kvadrātā ir 5. Vienu no iespējamiem veidiem, kā to var izdarīt, skat. 3.zīm.



3.zīm.

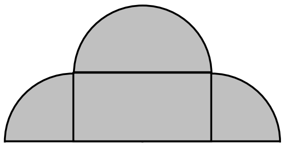
Pierādīsim, ka vairāk prasīto figūru dotajā kvadrātā ievietot nevar. Tā kā katra no T-veida figūrām sastāv no 4 rūtiņām, dotajā 5x5 rūtiņu kvadrātā nevar ievietot 7 vai vairāk figūras (jo $4 \cdot 7 > 25$).
Pieņemsim, ka 5x5 rūtiņu kvadrātā var ievietot 6 T-veida figūras. Tad pāri paliktu tieši viena nepārklāta rūtiņa, tātad vismaz trīs no visām kvadrāta stūra rūtiņām būtu pārklātas ar T-veida rūtiņām. Apzīmēsim šīs stūra rūtiņas ar *H* vai *V* atkarībā no tā, vai to pārklājošā T-veida figūra ir novietota horizontāli vai vertikāli.
Pieņemsim, ka visas 4 stūra rūtiņas ir pārklātas ar T-veida figūrām. Nav iespējams, ka 3 vai 4 stūra rūtiņas pārklāj horizontālas figūriņas, jo tad vismaz gar vienu malu būtu blakus jānovietojas vismaz 2 no horizontālām (vertikālām) figūriņām, bet tad tās aizņemtu vismaz $2 \cdot 3 > 5$ vienas malas rūtiņas. Līdzīgi arī vertikālas figūriņas nevar noklāt 3 vai 4 stūras rūtiņas. Tātad vairāk kā 2 horizontālas un 2 vertikālas figūriņas stūra rūtiņās nevar būt, pie tam vienas malas viena stūra rūtiņa ir *H*, bet otra - *V*. Apskatot visus iespējamos šo figūru novietojumus pie malas, redzam, ka pie katras malas noteikti rodas vismaz 1 ne-stūra rūtiņas, ko nevar pārklāt, tātad kopā nenoklātas vismaz 4 rūtiņas. Ja vienīgā nenoklātā būtu stūra rūtiņa, līdzīgi izspriežam, ka visas trīs pārklātās nevar būt viena veida (*H* vai *V*). Tātad vismaz pie vienas malas veidosies vēl vismaz viena ne-stūra rūtiņa, ko nevar pārkāt, tātad vismaz 2 rūtiņas paliks nepārklātas tāpēc nevar ievietot 6 T-veida figūras.

5. Pierādīsim, ka tādu naturālu skaitļu *a* un *b* nav.

1.risinājums. Tā kā x naturāls skaitlis, tad $x^2 < x^2 + x < x^2 + 2x + 1$ jeb $x^2 < x^2 + x < (x+1)^2$. Skaitļi x un $x + 1$ ir viens otram sekojoši naturāli skaitļi; starp to kvadrātiem nav citu naturālu skaitļu kvadrātu, jo starp x un $x + 1$ nav citu naturālu skaitļu. Tātad $x^2 + x$ nevar būt vienāds ar naturāla skaitļa y kvadrātu.

2.risinājums. Pieņemsim, ka naturāliem skaitļiem x un y pastāv vienādība $x^2 + x = y^2$. No tās pārveidojumu ceļā iegūstam $x = y^2 - x^2$ un tālāk $x = (y - x)(y + x)$. Tā kā $y - x$ ir vesels skaitlis, secinām, ka x dalās ar $y + x$. Bet tas nav iespējams, jo x un $x + y$ ir naturāli skaitļi un $x < x + y$. Iegūta pretruna, tātad mūsu pieņēmums ir nepareizs.

6. Sadalot iekrāsoto figūru, kā parādīts 4.zīm., tiek izveidots viens taisnstūris ar izmēriem 2×1, kā arī viens pusriņķis un divi ceturtdaļriņķi, kas kopā veido riņķi ar rādiusu 1. Tātad kopējais iekrāsotās figūras laukums ir $2\cdot 1+\pi\cdot 1^2=2+\pi$.



4.zīm.

7. Apzīmējam vienādsānu trijstūra pamatu ar *a*, bet vienādās malas ar *b*. Tad trijstūra perimetrs ir $a+2b$, paralelograma perimetrs ir $2a+2b$, bet romba perimetrs ir $4b$.
No dotā apgalvojuma par paralelograma perimetru iegūstam vienādojumu $2a+2b=a+2b+3$, no kurienes aprēķinām, ka $a=3$. Savukārt no apgalvojuma par romba perimetra garumu iegūstam vienādojumu $4b=a+2b+7$, ko pārveidojot iegūstam vienādojumu $2b=a+7$. Tā kā $a=3$, tad $2b=10$ un $b=5$. Tātad trijstūra perimetrs ir 13 cm.

8. a) Mazākais viena viencipara un viena divciparu skaitļa reizinājums, ko Skaitlītis var aprēķināt ar savu kalkulatoru, ir $1\cdot 11=11$; lielākais iespējamais reizinājums ir $9\cdot 99=891$. Vienīgais veids, kā iegūt reizinājumu 15, ir $1\cdot 15=15$, tātad tā ir viena no atbildēm (reizinājums $3\cdot 5$ neder – abi reizinātāji ir viencipara skaitļi). Vēl iespējams, ka patiesais reizinājums ir bijis 105 vai 150 (tā kā rezultāts ir mazāks nekā 891, reizinājums nevar būt, piemēram, 1005 u.c.).
Apskatīsim visas iespējas, kā ar vienu viencipara skaitli un vienu divciparu skaitli varam iegūt reizinājumus 105 un 150:

$105=3\cdot 35=5\cdot 21=7\cdot 15$

$150=2\cdot 75=3\cdot 50(*)=5\cdot 30(*)=6\cdot 25=10\cdot 15(*)$

Ar zvaigznītēm apzīmēti reizinājumi, kuri neatbilst uzdevuma nosacījumiem (skaitļi satur ciparu 0, turklāt pēdējā reizinājumā ir sareizināti divi divciparu skaitļi).
Tāpēc Skaitlītis varēja aprēķināt šādus reizinājumus:

$1\cdot 15$, $2\cdot 75$, $3\cdot 35$, $5\cdot 21$, $6\cdot 25$, $7\cdot 15$

b) Rīkojamies līdzīgi, kā iepriekšējā gadījumā. Ja sareizināti divi divciparu skaitļi, mazākais iespējamais reizinājums ir $11\cdot 11=121$, bet lielākais - $99\cdot 99=9801$. Tad iespējams, ka patiesais reizinājuma rezultāts ir 150, 1005, 1050 vai 1500. Jau iepriekš apskatījām reizinājumu 150 – vienīgie divciparu skaitļi, kurus sareizinos iegūst 150, ir 10 un 15, bet tie neder, jo skaitlis 10 satur ciparu 0. Tāpēc skaitli 150 nevar iegūt atbilstoši uzdevuma prasībām.
Sadalīsim pirmreizinātājos pārējos skaitļus 1005, 1050 un 1500:

$1005=3\cdot 5\cdot 67$

$1050=2\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7$

$1500=2\cdot 2\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 5$

Redzam, ka kā divu skaitļu reizinājumu 1005 var iegūt 3 veidos:

$1005=(3\cdot 5)\cdot 67=(3\cdot 67)\cdot 5=3\cdot(5\cdot 67)$, t.i.,

$1005=15\cdot 67=201\cdot 5(*)=3\cdot 335(*)$

Ar zvaigznītēm apzīmēti reizinājumi, kas neatbilst uzdevuma nosacījumiem, tāpēc Skaitlītis reizinājumu 1005 varēja iegūt tikai sareizinot skaitļus 15 un 67.

Apskatot skaitļus 1050 un 1500, līdzīgi apvienosim pirmreizinātājus divās grupās. Turklāt ievērojam, ka, apvienojot skaitļus 2 un 5 vienā grupā, iegūsim reizinātāju, kas beidzas ar 0, kas neatbilst uzdevuma nosacījumiem, tāpēc šādus sadalījumus neapskatīsim.

$$1050 = (2\cdot 3)\cdot(5\cdot 5\cdot 7) = (2\cdot 7)\cdot(5\cdot 5\cdot 3) = (2\cdot 3\cdot 7)\cdot(5\cdot 5) = 2\cdot(5\cdot 5\cdot 3\cdot 7)$$

$$1500 = (2\cdot 2)\cdot(3\cdot 5\cdot 5\cdot 5) = (2\cdot 2\cdot 3)\cdot(5\cdot 5\cdot 5)$$

un tālāk

$$1050 = 6\cdot 175(*) = 14\cdot 75 = 42\cdot 25 = 2\cdot 525(*)$$

$$1500 = 4\cdot 375(*) = 12\cdot 125(*)$$

Atkal ar zvaigznītēm apzīmēti reizinājumi, kas neatbilst uzdevuma nosacījumiem, tāpēc, sareizinot divus divciparu skaitļus, Skaitlītis uz sava sabojātā kalkulatora rezultātu 15 varēja iegūt tikai šādi:

$$15\cdot 67,\ 14\cdot 75,\ 42\cdot 25$$

9. Skaidrs, ka A un B nevarēja vienlaicīgi teikt patiesību. Ja tieši viens no viņiem teica patiesību, tad C un D meloja. Savukārt ja gan A, gan B ir meļi, tad C teica patiesību, bet D meloja. Abos gadījumos tieši viens skolēns teica patiesību.

10. Apzīmēsim suņu skaitu pilsētā ar x, bet kaķu skaitu – ar y. Tad to suņu skaits, kas sevi uzskata par kaķi ir $\frac{x}{10}$, bet kaķu skaits, kas sevi uzskata par kaķi (resp., neuzskata sevi par suni) ir $\frac{9y}{10}$.

Tā kā 20% no visiem dzīvniekiem sevi uzskata par kaķi, varam uzrakstīt vienādojumu $\frac{x}{10}+\frac{9y}{10}=\frac{x+y}{5}$. Veicam ekvivalentus pārveidojumus: $x+9y=2x+2y$, no kurienes $x=7y$. Tātad $\frac{1}{8}=12{,}5\%$ no dzīvniekiem pilsētā ir kaķi.