„Profesora Cipariņa kluba” 2. nodarbība 2010./2011. mācību gadā
Uzdevumu īsi atrisinājumi.

1. Tādu veselu skaitļu a un b nav. Tā kā vienādības kreisajā pusē gan $8a$, gan $12b$ dalās ar 2, to starpība arī dalās ar 2. Tāpēc arī labajā pusē esošajai izteiksmei jādalās ar 2. Bet skaitlis 5 nedalās ar divi.

2. Atbilde: Skaidrs, ka šāda „saīsināšanas īpašība” ir spēkā visām daļām, kurām skaitītājs un saucējs ir tādi divciparu skaitļi, kuriem abi cipari ir vienādi. Bez tam šī „īpašība” ir spēkā daļām $\frac{16}{64}$; $\frac{19}{95}$; $\frac{26}{65}$; $\frac{49}{98}$.

Risinājums. Apzīmēsim ar a un b skaitītāja ciparus, bet ar b un c – saucēja ciparus. Iegūsim vienādojumu

$$\frac{10a+b}{10b+c}=\frac{a}{c}.$$

Pārveidosim to:

$$(10a+b)c=a(10b+c)$$
$$10ac+bc=10ab+ac$$
$$10a(c-b)=c(a-b) \qquad (*)$$

Ievērosim, ka $a\neq 0$ un $b\neq 0$, jo tad skaitītājā un saucējā nebūtu divciparu skaitļa.

Arī $c\neq 0$, jo tad nevarētu rakstīt daļu $\frac{a}{c}$.

Ja $c-b=0$, tad vienādojuma (*) kreisā puse ir vienāda ar 0. Arī labajai pusei jābūt vienādai ar 0. Tātad $a-b=0$, un der atrisinājums $c=b=a$ (visi cipari ir vienādi).

Tālāk aplūkosim tikai tos atrisinājumus, kuriem $c\neq b$ un $a\neq b$.

Vienādojuma kreisā puse dalās ar 10, tāpēc arī labajai pusei $c(a-b)$ jādalās ar 10. Tā kā $c\neq 0$, $c<10$, $a-b\neq 0$ un $a-b<10$, varam aplūkot 2 gadījumus:

a) c dalās ar 2, t.i., $c=2k$, kur k = 1; 2; 3; 4, un
$a-b$ dalās ar 5, t.i., $a-b=5$ vai arī $a-b=-5$.

b) c dalās ar 5, t.i., $c=5$, un
$a-b$ dalās ar 2, t.i., $a-b=2m$, kur $m=\pm1; \pm2; \pm3; \pm4$.

Aplūkosim katru gadījumu atsevišķi.

a1) $a-b=5$ un $c=2k$ (k = 1; 2; 3; 4). Tad no (*) iegūstam $a(2k-b)=k$. Tā kā $b=a-5$, tad $a>5$. Tāpēc kreisās puses vērtība pēc moduļa lielāka par labās puses vērtību, un atrisinājumu nav.

a2) $a-b=-5$ un $c=2k$ (k = 1; 2; 3; 4). Tad no (*) iegūstam $a(2k-b)=-k$ un, tā kā $b=a+5$, tad $a(2k-a-5)=-k$. Skaidrs, ka $1\leq a\leq 4$ (jābūt $b\leq 9$). Ievietojot šīs a vērtības, redzam:

- ja $a=1$, tad $k=2$;
- ja $a=2$, tad k neiznāk vesels skaitlis;
- ja $a=3$, tad atkal k neiznāk vesels skaitlis;
- ja $a=4$, tad $k=4$.

Tad attiecīgi iegūstam daļas $\frac{16}{64}$ un $\frac{49}{98}$.

b) $c=5$ un $a-b=2m$ (kur $m=\pm1; \pm2; \pm3; \pm4$). No (*) iegūstam

$$10a(5-b)=5\cdot 2m$$
$$a(5-b)=m$$

Ievietosim $a=2m+b$:

$(2m+b)(5-b)=m$

Ja $m>0$, tad $2m+b>m$ un atrisinājuma nav.
Aplūkosim gadījumus, kad *m* ir negatīvs skaitlis.

- Ja $m=-1$, tad $(b-2)(5-b)=-1$, bet $(b-2)(b-5)=1$ nav atrisinājuma.
- Ja $m=-2$, tad $(b-4)(5-b)=-2$ ir atrisinājums $b=6$ ($a=2$, $c=5$); neder atrisinājums $b=3$, jo tad *a* sanāk negatīvs.
- Ja $m=-3$, tad $(b-6)(b-5)=3$ nav atrisinājuma.
- Ja $m=-4$, tad $(b-8)(5-b)=-4$ ir atrisinājums $b=9$ ($a=1$, $c=5$); neder atrisinājums $b=4$, jo tad *a* sanāk negatīvs.

Tātad b) gadījumā ieguvām divas daļas: $\frac{26}{65}$ un $\frac{19}{95}$.

3. Tā kā vienādojuma sakne ir skaitlis 7, tad, ievietojot nezināmā vietā 7, jāiegūst patiesa vienādība. Tāpēc apzīmēsim tintes traipa vietā esošo skaitli ar *a*, savukārt *x* vietā ievietosim skaitli 7, un atrisināsim tagad iegūto vienādojumu attiecībā pret *a*.

$(7+a)(7+4)-(7+1)(7+2)=38$

$(7+a)\cdot 11-8\cdot 9=38$

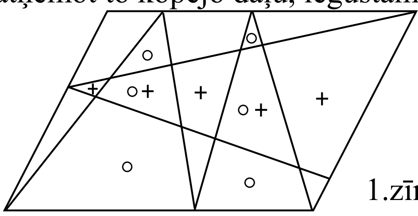
$77+11a-72=38$

$11a=33$

$a=3$

Tātad tintes traips aizsedzis skaitli 3.

4. Izmantojot to, ka paralelograma laukums ir *ah*, bet trijstūra laukums - $\frac{1}{2}ah$, iegūstam, ka ar aplīšiem apzīmētais laukums ir puse paralelograma laukuma, bet ar krustiņiem apzīmētais – mazāk nekā puse paralelograma laukuma (skat. 1.zīm.). No abiem laukumiem atņemot to kopējo daļu, iegūstam vajadzīgo.



1.zīm.

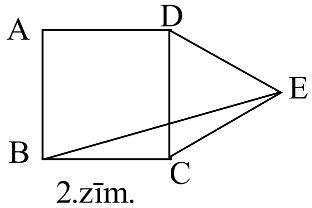
5. a) Lai nekādu divu izvēlētu skaitļu starpība nebūtu 5, var izvēlēties ne vairāk kā divus skaitļus no šādām skaitļu grupām: $\{1;6;11;16\}$; $\{2;7;12;17\}$; $\{3;8;13;18\}$; $\{4;9;14;19\}$ un $\{5;10;15;20\}$. Tātad pavisam var izvēlēties ne vairāk kā $2\cdot 5=\mathbf{10}$ skaitļus. Viens no veidiem, kā var izvēlēties 10 šādus skaitļus, ir:

1; 2; 3; 4; 5; 11; 12; 13; 14; 15.

b) No katras četru skaitļu grupas $\{a;a+5;a+10;a+15\}$ divus skaitļus var izvēlēties 3 veidos: *a* un $a+10$; *a* un $a+15$; $a+5$ un $a+15$. Tā kā ir pavisam 5 šādas grupas, tad šos 10 skaitļus var izvēlēties $3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3=\mathbf{243}$ dažādos veidos.

6. Tā kā *ABCD* ir kvadrāts, tad $\angle BCD=90^\circ$ (skat. 2.zīm.) un $DC=CB$; savukārt, tā kā trijstūris *CDE* ir vienādmalu, tad $\angle DCE=60^\circ$ un $EC=DC$. Tāpēc trijstūris *ECB* ir vienādsānu ($EC=CB$) un $\angle BCE=\angle BCD+\angle DCE=90^\circ+60^\circ=150^\circ$.

Tādēļ $\angle CEB = \angle CBE = \frac{1}{2}\left(180^\circ - 150^\circ\right) = 15^\circ$, no kā iegūstam, ka $\angle BED = \angle CED - \angle CEB = 60^\circ - 15^\circ = 45^\circ$.



2.zīm.

7. Tā kā prasītais skaitlis ir četrciparu, tas atrodas starp 1000 un 9999. Apzīmēsim šo skaitli ar n. Zināms, ka n ir kāda vesela skaitļa kvadrāts, turklāt skaitlis $n-1$ dalās ar katru no skaitļiem 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 un 9. Tātad $n-1$ dalās ar šo skaitļu mazāko kopīgo dalītāju, kas ir vienāds ar $8\cdot 9\cdot 5\cdot 7 = 2520$.
Tāpēc ir tikai trīs iespējamās n vērtības: $2520+1=2521$; $2520\cdot 2+1=5041$ un $2520\cdot 3+1=7561$ ($2520\cdot 4+1$ jau ir lielāks nekā 9999). No šiem trim skaitļiem tikai 5041 ir kāda skaitļa kvadrāts ($71^2 = 5041$). Tātad Lauras PIN-kods ir **5041**.
Piezīme. Uzdevumu ir iespējams arī atrisināt, apskatot tos visus četrciparu skaitļus, kas ir kāda vesela skaitļa kvadrāti, un tālāk katram iegūtajam skaitlim pārbaudot, vai izpildās punktā b) minētais nosacījums. Lai gan to var izdarīt, šī metode nav visai efektīva, jo jāveic pārbaudes pavisam 68 skaitļiem. Turklāt, ja izmanto šo metodi, katram skaitlim pārbaude jāveic ļoti rūpīgi, norādot, kāpēc tieši šis skaitlis neder (piemēram, skaitlim 5929 jānorāda, ka tas dalās ar 7 un tāpēc atlikums ir 0 nevis prasītais 1). Nepietiek tikai pateikt, ka šī pārbaude ir veikta, nenorādot sīkāku informāciju.
Protams, šo metodi var arī reducēt, uzreiz izslēdzot visus pāra skaitļus (jo tiem atlikums dalot ar 2 noteikti būs 0 nevis 1), tādējādi jāveic „tikai” 34 pārbaudes; vai arī apskatot tikai skaitļus, kas beidzas ar ciparu 1 (lai apmierinātu nosacījumus dalot ar 2 un 5). Tomēr, šo loģisko spriedumu veikšanas gaitā, risinātājs pats, iespējams, nonāks jau pie sākumā uzrādītā īsākā risinājuma.

8. Apzīmēsim diametra garumu Centa celiņam ar c, bet Baibas celiņa pirmā pusriņķa diametra garumu ar b, tad otrā pusriņķa diametra garums ir $c-b$. Viss Centa celiņa garums ir $\frac{1}{2}\pi c$, savukārt viss Baibas celiņa garums ir vienāds ar $\frac{1}{2}\pi b + \frac{1}{2}\pi\left(c-b\right) = \frac{1}{2}\pi b + \frac{1}{2}\pi c - \frac{1}{2}\pi b = \frac{1}{2}\pi c$. Tātad Centa un Baibas celiņu garumi ir vienādi. Līdzīgi varam iegūt, ka arī Aivara ceļa garums ir tāds pats, kā Baibai un Centim. Tā kā visi sportisti skrēja ar vienādu vienmērīgu ātrumu, tad viņi visi finišēja reizē.

9. Ierakstot starp skaitļa 121 cipariem nulles skaitā n (n – vesels pozitīvs skaitlis), iegūstam skaitli $1\underbrace{0..0}_{n}2\underbrace{0..0}_{n}1$.

Šo skaitli var izteikt formā $1\underbrace{0..0}_{n}2\underbrace{0..0}_{n}1 = 1\cdot 10^{2n+2} + 2\cdot 10^{n+1} + 1$, no kurienes pārveidojumu ceļā pakāpeniski iegūstam:

$$1\cdot 10^{2n+2} + 2\cdot 10^{n+1} + 1 =$$
$$= 10^{2(n+1)} + 2\cdot 10^{n+1} + 1 =$$

$$= \left(10^{n+1}\right)^2 + 2\cdot 10^{n+1} + 1 =$$
$$= \left(10^{n+1} + 1\right)^2$$

Tātad $1\underbrace{0..0}_{n}2\underbrace{0..0}_{n}1 = \left(10^{n+1} + 1\right)^2$, k.b.j.

10. Lai kļūtu par uzvarētāju, pirmajam spēlētājam jācenšas tikt pie skaitļa 89. Ja viņš iegūs šo skaitli, tad, lai arī kādu skaitli nosauktu pretinieks, viņš noteikti varēs atrast atbilstošu skaitli, kuru pieskaitot jau esošajam rezultātam, rodas summa 100 (jo otrajam spēlētājam jānosauc skaitlis ne mazāks kā 1 un ne lielāks kā 10; tātad pēc otrā spēlētāja gājiena tiks iegūts summā vismaz 90, bet noteikti ne 100).
Tālāk izspriedīsim, kā pirmajam spēlētājam iegūt summā skaitli 89.
Sāksim no 100 pakāpeniski atņemt 11. Iegūsim šādu skaitļu rindu – 89, 78, 67, 56, 45, 34, 23, 12, 1 (vai arī augošā secībā 1, 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89).
Tagad ir skaidrs – ja pirmais spēlētājs nosauks „1”, tad, lai arī kādu skaitli nosauktu otrs spēlētājs, viņš pirmajam spēlētājam netraucēs iegūt 12. Tieši tāpat pirmais spēlētājs vienmēr varēs iegūt 23, bet pēc tam – 34, 45, 56, 67, 78 un visbeidzot 89. Un mēs jau iepriekš izspriedām, ka pirmais spēlētājs varēs iegūt 100.