„Profesora Cipariņa kluba” 3. nodarbība 2010./2011. mācību gadā
Uzdevumu īsi atrisinājumi.

1. Ja skaitlis $\overline{a543b}$ dalās ar 36, tas dalās gan ar 9, gan ar 4. Apskatīsim atsevišķi dalāmības pazīmes ar skaitļiem 9 un 4.
Lai skaitlis dalītos ar 9, tā ciparu summai arī jādalās ar 9, tāpēc $a+5+4+3+b$ dalās ar 9. Tā kā $5+4+3=12$, bet a un b ($0 \le a+b \le 18$) ir cipari, tad vai nu $a+b=6$, vai arī $a+b=15$.
Savukārt atbilstoši dalāmības pazīmei ar 4, skaitļa $\overline{a543b}$ pēdējo divu ciparu veidotajam skaitlim $\overline{3b}$ jādalās ar 4, tātad $\overline{3b}$ ir vai nu 32, vai arī 36, tātad $b=2$ vai $b=6$.
Ja $b=2$, tad nav iespējams, ka $a+b=15$ (jo a ir viencipara skaitlis); tāpēc atliek, ka $a+b=6$, no kurienes iegūstam $a=4$.
Līdzīgi arī, ja $b=6$, nav iespējams $a+b=6$ (jo tad $a=0$, bet tad $\overline{a543b}$ nav piecciparu skaitlis); tāpēc no $a+b=15$ iegūstam $a=9$.
Tātad $a=4$, $b=2$ un $a=9$, $b=6$ ir vienīgās iespējamās a un b vērtības.

2. Aprēķināsim dažus nākamos virknes locekļus:

- ceturtais virknes loceklis vienāds ar $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{5}{12}$;
- piektais virknes loceklis vienāds ar $\frac{5}{12}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{1}{4}$;
- sestais virknes loceklis vienāds ar $\frac{1}{4}-\frac{5}{12}+\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$;
- septītais virknes loceklis vienāds ar $\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{5}{12}=\frac{1}{2}$.

Tātad pirmie septiņi virknes locekļi ir $\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{5}{12}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$.
Tātad piektais, sestais un septītais virknes loceklis ir attiecīgi vienādi ar pirmajiem trim virknes locekļiem. Tā kā katra nākamā virknes locekļa vērtība ir atkarīga no iepriekšējo trīs virknes locekļu vērtībām, 8. loceklis būs vienāds ar ceturto, 9. loceklis – ar piekto (kas vienāds ar pirmo virknes locekli) utt. Tas nozīmē, ka virkne satur tikai 4 dažādus skaitļus, kas atkārtojas secībā $\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{5}{12}, \ldots$.
(Šādas virknes sauc par periodiskām.)
Tātad gan desmitais, gan 2010. virknes loceklis būs vienāds ar otro virknes locekli – $\frac{1}{3}$.

3. a) Lai pareizi atbildētu uz šo uzdevuma daļu, pietiek parādīt vienu skaitli ar prasīto īpašību, apmainīt tā ciparus vietām un pateikt, cik reizes iegūtais skaitlis ir lielāks nekā tā ciparu summa. Savukārt mēs atradīsim visus skaitļus, kas ir četras reizes lielāki nekā tā ciparu summa, kā arī pierādīsim, ka visiem tiem attiecība pret tā ciparu summu ir viens un tas pats skaitlis (apzīmēsim to ar *k*).
Apzīmēsim meklēto skaitli ar $\overline{ab}=10a+b$. Atbilstoši uzdevuma prasībām, $10a+b=4(a+b)$. Vienkāršojot iegūstam, ka $2a=b$. Tātad visi divciparu skaitļi, kuriem vieni ir divreiz vairāk nekā desmiti, apmierina uzdevuma prasības. Ir četri šādi skaitļi: 12, 24, 36 un 48.

Apmainot atrastā skaitļa ciparus vietām, iegūstam skaitli $\overline{ba} = 10b + a$. Pieņemsim, ka šis skaitlis ir k reizes lielāks nekā tā ciparu summa: $10b + a = k(a + b)$, ko pakāpeniski pārveidojot iegūstam $10b - kb = ka - a$ un $b(10 - k) = a(k - 1)$. Ievietojam $b = 2a$ un izdalām abas vienādojuma puses ar a (to drīkst darīt, jo $a \neq 0$) un iegūstam $2(10 - k) = (k - 1)$ un tālāk $k = 7$.

Piezīme. Protams, var apskatīt katru no četriem iespējamajiem skaitļiem un iegūt, ka visos gadījumos iegūst skaitli 7 (piemēram, $84 = 7(4 + 8)$).

b) Tagad zinām, ka $10a + b = n(a + b)$. Atkal pārveidojam un pakāpeniski iegūstam $10a - na = nb - b$ un $a(10 - n) = b(n - 1)$. Līdzīgi kā iepriekš no tā, ka skaitlis ir k reizes lielāks nekā tā ciparu summa, pakāpeniski iegūstam $b(10 - k) = a(k - 1)$. Izsakām, piemēram, no otrā vienādojuma $b = \frac{a(k-1)}{(10-k)}$, ievietojam pirmajā un izdalām abas vienādojuma puses ar a, tādējādi iegūstam $(10 - n)(10 - k) = (k - 1)(n - 1)$.

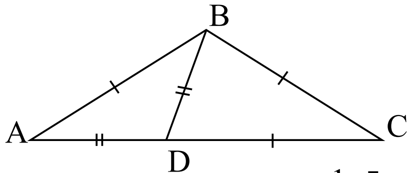
Atverot iekavas iegūstam $100 - 10n - 10k + nk = nk - n - k + 1$, ko vienkāršojot iegūstam $9n + 9k = 99$ un $k = 11 - n$. Tātad skaitlis, ko iegūst, samainot dotā divciparu skaitļa ciparus vietām, ir $11 - n$ reizes lielāks nekā tā ciparu summa.

4. Tā kā $1 < \frac{2010}{1996} < 2$, tad $a = 1$; iegūstam daļu formā $1 + \frac{14}{1996}$. Atņemot 1 un apgriežot daļu $\frac{14}{1996}$, iegūstam $\frac{14}{1996} = \frac{1}{\frac{1996}{14}} = \frac{1}{142 + \frac{8}{14}}$. Tātad $b = 142$. Līdzīgi rīkojamies tālāk, apgriežot daļu $\frac{8}{14}$ un iegūstam $\frac{8}{14} = \frac{1}{\frac{14}{8}} = \frac{1}{1 + \frac{6}{8}}$, tātad $c = 1$.

Tālāk $\frac{6}{8} = \frac{1}{\frac{8}{6}} = \frac{1}{1 + \frac{2}{6}}$, tāpēc $d = 1$ un $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, tātad $e = 3$.

Esam ieguvuši, ka
$$\frac{2010}{1996} = 1 + \cfrac{1}{142 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3}}}}.$$

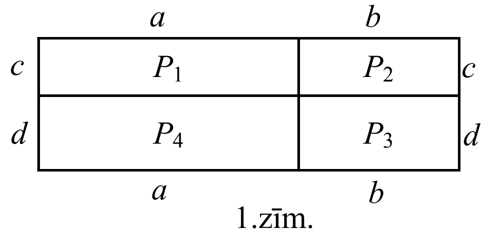
5. Apzīmēsim $\angle BAC = x$ (skat. 1.zīm.). Tā kā ΔABC ir vienādsānu, arī $\angle BCA = x$; arī ΔADB ir vienādānu, tāpēc $\angle ABD = x$. Tālāk $\angle CDB = \angle DAB + \angle DBA = 2x$ (jo $\angle CDB$ ir ΔADB ārējais leņķis). Tā kā $BC = CD$, tad arī ΔBCD ir vienādsānu, tāpēc $\angle CBD = \angle CDB = 2x$.



1.zīm.

Ikkatra trijstūra visu leņķu summa ir vienāda ar 180°, tāpēc, apskatot trijstūra ΔBCD leņķus, iegūstam, ka $2x+2x+x=180^\circ$, tātad $5x=180^\circ$ un $x=36^\circ$. Jau sākumā apzīmējām $\angle BAC=x$, tāpēc $\angle BAC=36^\circ$.

6. Atbilde: 2011 cm.
Risinājums. Apzīmēsim mazo taisnstūru perimetrus ar P_1, P_2, P_3, P_4 un to malas ar a, b, c, d (skat. 1.zīm.). Atcerēsimies, ka taisnstūra pretējās malas ir vienādas.



1.zīm.

No perimetra definīcijas seko, ka

$$P_1=2a+2c$$
$$P_2=2b+2c$$
$$P_3=2b+2d$$
$$P_4=2a+2d$$

Saskaitot P_1 ar P_3 un P_2 ar P_4, iegūstam:

$$P_1+P_3=2a+2c+2b+2d=2a+2b+2c+2d \text{ un}$$
$$P_2+P_4=2b+2c+2a+2d=2a+2b+2c+2d.$$

Tātad „pa diagonāli” novietoto taisnstūru perimetru summas ir vienādas, t.i. $P_1+P_3=P_2+P_4$. Tātad $2009+P_3=2010+2010$, no kā iegūstam, ka $P_3=2011$.

7. Varam izveidot tabulu, kurā attēlosim katrā aktivitātē iesaistīto skolēnu skaitu:

	Slēpošana	Hokejs	**Kopā**
Volejbols	126	54	**180**
Futbols	99		**120**
Kopā	**225**		

Ja no 300 skolēniem 60% spēlē volejbolu un pārējie jeb 40% spēlē futbolu, tad 180 skolēni spēlē volejbolu un 120 – futbolu. Ja 30% no visiem volejbolistiem ziemā spēlē hokeju, tad viegli aprēķināt, ka tie ir $180\cdot\frac{3}{10}=54$ skolēni. Tātad vasarā ar volejbolu, bet ziemā ar distanču slēpošanu nodarbojas 180 – 54 = 126 skolēni.
Ja 56% no visiem slēpotājiem vasarā spēlē volejbolu un mēs jau ieguvām, ka tie ir 126 skolēni, tad viegli aprēķināt visu slēpotāju skaitu: $56\%x=126$, $x=126:\frac{56}{100}=225$ skolēni; tādējādi vasarā ar futbolu, bet ziemā ar hokeju nodarbojas $225-126=99$ skolēni. Tātad vasarā ar futbolu, bet ziemā ar hokeju nodarbojas 120 – 99 = **21** skolēns.

8. No 1 līdz 2010 ir nepāra skaits (1005) pāra skaitļi un nepāra skaits (1005) nepāra skaitļi. Visu pāra skaitļu summa un starpība noteikti būs pāra skaitlis; savukārt nepāra skaita nepāra skaitļu summa un starpība noteikti ir nepāra skaitlis. Bet, tā kā pāra skaitļa un nepāra skaitļa summa vai starpība ir nepāra skaitlis, tad, neatkarīgi no saliktajām zīmēm, visu skaitļu summa būs nepāra skaitlis.

Mazākais pozitīvais nepāra skaitlis ir 1.

Summas vērtību 1 var iegūt, piemēram, tā:

$$\underbrace{-1+2+3-4}_{=0}\underbrace{-5+6+7-8}_{=0}-\ldots\underbrace{-2005+2006+2007-2008}_{=0}-2009+2010=1.$$

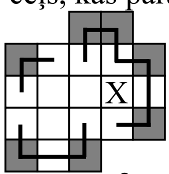
Te sagrupēti skaitļi no 1 līdz 2008 pa četri tā, lai katrās iekavās esošā summa būtu 0, bet skaitļiem 2009 un 2010 priekšā liktas zīmes tā, lai to summa būtu 1.

9. Pirmā rindā stāvošā persona nevarēja būt bruņinieks un teikt taisnību, jo tad visi aiz viņa stāvošie arī būtu bruņinieki, bet tad viņu apgalvojumi, ka viņiem tieši priekšā stāvošā persona ir laupītājs, būtu aplami. Tātad pirmais rindā stāv laupītājs un melo.

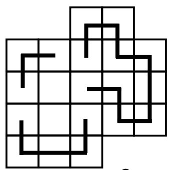
Otrā rindā stāvošā persona apgalvo, ka viņam priekšā stāv laupītājs, kas ir patiesība; tātad viņš ir bruņinieks. Trešā persona saka, ka viņam priekšā ir bruņinieks un melo; tātad viņš ir laupītājs. Turpinot spriedumus iegūstam, ka bruņinieki un laupītāji nostājušies pamīšus, tāpēc rindā stāv **12 bruņinieki** un 13 laupītāji.

10. Tātad mums ir jāapskata, cik daudz dažādus noslēgtus ceļus var izveidot dotajā „kartē” atbilstoši uzdevuma nosacījumiem (uzskatīsim, ka nav nozīmes, kurā virzienā (pa vai pretēji pulksteņa rādītāja virzienam) dodas rūķītis).

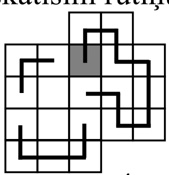
Redzam, ka caur katru stūra rūtiņu ir tieši viens iespējamais ceļš, tāpēc rūķītis cauri šīm rūtiņām dosies, kā parādīts 2.zīmējumā. Cauri rūtiņai, kas apzīmēta ar X, arī iespējams tikai viens ceļš, kas parādīts 3.zīm.

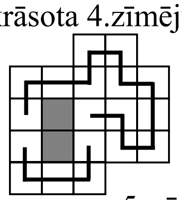


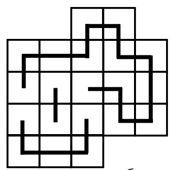
2. zīm.


3. zīm.

Tālāk apskatīsim rūtiņu, kas iekrāsota 4.zīmējumā.


4. zīm.

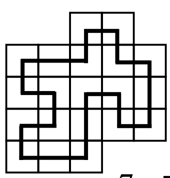

5. zīm.

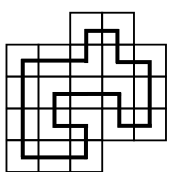

6. zīm.

Ja ceļš no šīs rūtiņas tiktu savienots ar apakšējo rūtiņu, tad izveidotos atsevišķs noslēgts ceļš un rūķītis nevarētu apciemot pārējot rūķīšus. Tātad no šīs iekrāsotās rūtiņas rūķītim noteikti jādodas pa kreisi (skat. 5.zīm.).

Ir atlikušas tikai divas rūtiņas, kurās rūķītis vispār nav „ciemojies”. Ja šīs divas rūtiņas netiktu savienotas ar ceļu, tad atkal izveidotos divi noslēgti ceļi. Tāpēc šīs divas rūtiņas noteikti savieno ceļš (skat. 6.zīm.).

Tālāk redzam, ka ir tikai divi veidi, kā var pabeigt šo rūķīša ceļu (skat. 7. un 8.zīm.) .


7. zīm.


8. zīm.

Tātad, neatkarīgi no tā, kurā rūtiņā rūķītis dzīvo, ir iespējami tikai divi dažādi ceļi, kā viņš var apstaigāt kaimiņus.