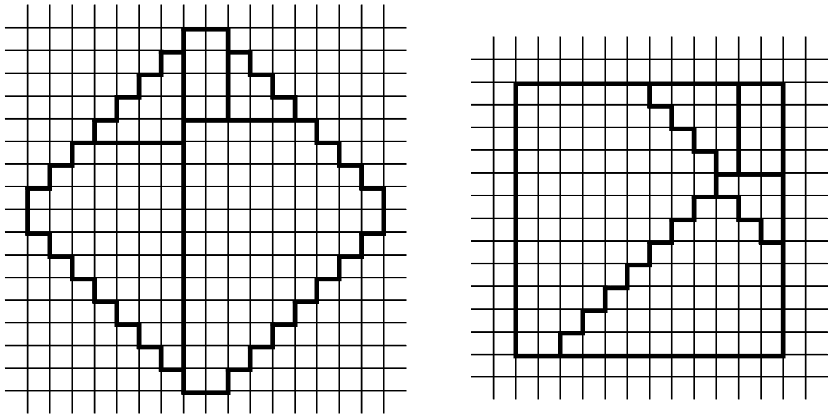
„Profesora Cipariņa kluba” 4. nodarbība 2010./2011. mācību gadā
Uzdevumu īsi atrisinājumi

1. To var izdarīt, piemēram, šādi:

$$\begin{array}{r} 285 \\ \times \quad 39 \\ \hline 2565 \\ 855 \\ \hline 11115 \end{array}$$

2. Ja šo skaitļu ciparu summas būtu vienādas, tad skaitļi, dalot ar 3, dotu vienādus atlikumus, tātad to starpība dalītos ar 3. Bet $13n+9-4n-7=9n+2$ nedalās ar 3.

3. Jā, to var izdarīt. Skat., piemēram, 1.zīm.



1.zīm.

4. Atbilde: to nevar izdarīt.

Risinājums. Apzīmēsim skaitļus, kas atrodas pirmajā un trešajā rūtiņā ar x un y (skat. 2.zīm.). Tad pirmajās trīs rūtiņās esošo skaitļu summa ir $x+101+y$. Arī otrajā, trešajā un ceturtajā rūtiņā esošo skaitļu summai jābūt $x+101+y$, tāpēc ceturtajā rūtiņā jāatrodas skaitlim x.

x	101	y									21	

2.zīm.

Tā kā arī ceturtajā, piektajā un sestajā rūtiņā esošo skaitļu summai jābūt $x+101+y$, iegūstam, ka piektajā rūtiņā jābūt skaitlim 101. Turpinot šādus spriedumus, iegūstam, ka skaitļi jāizvieto tā, kā parādīts 3.zīm. Tātad, ja skaitļus var izvietot rūtiņās atbilstoši prasībām, tad to var izdarīt tieši vienā veidā.

x	101	y	x	101	y	x	101	y	x	101	$\boldsymbol{y=21}$	x

3.zīm.

No izvietojuma redzams, ka $y=21$. Tā kā visās trīspadsmit rūtiņās ierakstīto skaitļu summai jābūt 2011, iegūstam vienādojumu $5x+4\cdot 101+4\cdot 21=2011$. Veicot pārveidojumus iegūstam, ka $5x=1523$, tātad x nav naturāls skaitlis un uzdevumā prasīto nevar izdarīt.

5. Pieņemsim, ka lapa pārklāta tā, ka uzdevuma nosacījumi izpildās. Acīmredzot katrā rindiņā jābūt pāra skaitam skaitļu „–1”. Tātad arī visā apskatāmajā lapā ir pāra skaits „–1”. Tātad uz lapas novietots pāra skaits kartiņu. Tā kā katra kartiņa nosedz divas rūtiņas, tad lapas rūtiņu skaits $5n$ dalās ar 4. Tā kā skaitļiem 5 un 4 nav citu kopīgu dalītāju kā 1 un –1, tad n dalās ar 4.

Mēs esam pierādījuši: **ja** lapu var pārklāt ar kartiņām tā, kā teikts uzdevuma nosacījumos, n **noteikti** jādalās ar 4. Citiem vārdiem, mēs esam pierādījuši, ka tad, ja n nedalās ar 4, lapu prasītajā veidā apklāt nevar. Bet no tā vēl neseko, ka, ja n dalās ar 4, tad lapu, kuras izmēri ir $5 \times n$ rūtiņas, noteikti var pārklāt tā, kā teikts uzdevuma nosacījumos; tas prasa papildus pierādījumu.
Pierādīsim to.
4.zīmējumā redzams, kā saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem var apklāt lapu, kuras izmēri ir 5×4 rūtiņas.

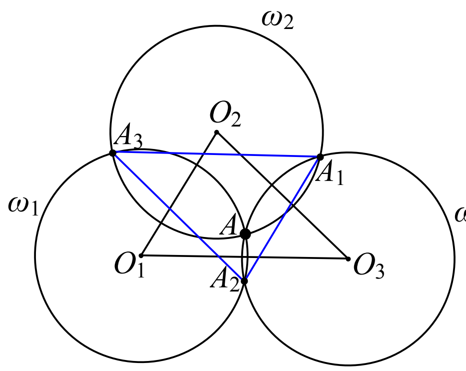
1	–1	–1	1
1	–1	1	–1
–1	–1	1	1
–1	1	–1	1
1	–1	1	–1

4.zīm.

Ja lapas izmēri ir $5 \times 4k$ rūtiņas (k – jebkurš naturāls skaitlis), tad, saliekot vienu otram blakus k tādus taisnstūrus, kādi parādīti 4.zīmējumā, iegūstam lapas izklājumu ar kartiņām, kas apmierina uzdevuma nosacījumus.

6. Apzīmēsim abu Ievas sveču augstumus centimetros ar h. Vienā stundā pirmā svece nodeg $\frac{h}{10}$ cm, bet otrā $\frac{h}{8}$ cm. Tādējādi x stundās katra svece būs nodegušas attiecīgi $\frac{hx}{10}$ cm un $\frac{hx}{8}$ cm.
Ja Ieva abas sveces iededzina tieši pusdienlaikā, tad pēc x stundām no tā brīža sveču augstumi būs attiecīgi $\left(h - \frac{hx}{10}\right)$ cm un $\left(h - \frac{hx}{8}\right)$ cm.
Mums jānoskaidro, pēc cik ilga laika pirmās sveces augstums būs divas reizes lielāks nekā otrās sveces augstums. Tātad mums jāatrod tāds laiks x, pēc kura abu sveču augstumi apmierina sekojošu venādojumu $h - \frac{hx}{10} = 2\left(h - \frac{hx}{8}\right)$. Tā kā zinām, ka $h \neq 0$, varam vienādojuma abas puses izdalīt ar h, un, atverot iekavas, iegūstam vienādojumu $1 - \frac{x}{10} = 2 - \frac{x}{4}$. Reizinot abas vienādojuma puses ar 20, iegūstam $20 - 2x = 40 - 5x$ un $x = 6\frac{2}{3}$.
Tātad pēc 6 stundām un 40 minūtēm jeb **plkst. 18:40** pirmās sveces augstums būs divas reizes lielāks nekā otrās sveces augstums.

7. Pieņemsim, ka ω_1 un ω_2 otrs krustpunkts ir A_3, ω_1 un ω_3 krustpunkts ir A_2, ω_2 un ω_3 krustpunkts ir A_1 (skat. 5.zīm.).



5.zīm.

Pierādīsim, ka $O_1O_2 = A_2A_1$. Tā kā visas četrstūra $AO_2A_1O_3$ malas ir vienādas (tās ir vienādu riņķa līniju rādiusi), tad $AO_2A_1O_3$ ir rombs un nogriežņi O_2A_1 un AO_3 ir paralēli un vienādi. Līdzīgi pierāda, ka O_1A_2 un AO_3 ir paralēli un vienādi. Tātad O_2A_1 un O_1A_2 ir paralēli un vienādi, un $O_1O_2A_1A_2$ ir paralelograms, tāpēc arī $O_1O_2 = A_2A_1$.

Līdzīgi pierāda, ka $O_2O_3 = A_3A_2$ un $O_1O_3 = A_3A_1$.

Tātad $\Delta O_1O_2O_3$ un $\Delta A_1A_2A_3$ ir vienādi, jo to malas ir pa pāriem vienādas (pazīme *mmm*).

8. Atbilde: Vārdiem AHH un HAA ir dažādas nozīmes.
Redzam, ka, izpildot jebkuru no divām operācijām, starpība starp burtu A un H daudzumiem vārdā nemainās. Bet vārdos AHH un HAA šī starpība ir attiecīgi +1 un –1.

9. Apskatīsim apgalvojumus:
„Andris ir vecāks nekā Edgars”,
„Edgars ir vecāks nekā Kristaps”,
„Andris ir jaunāks nekā Kristaps”.
Skaidrs, ka tie visi trīs vienlaicīgi nevar būt pareizi: ja Andris ir vecāks nekā Edgars un Edgars ir vecāks nekā Kristaps, tad Andrim jābūt vecākam nekā Kristapam. Tātad viens no šiem apgalvojumiem noteikti ir nepareizs.
Apskatīsim tagad apgalvojumus:
„Jana ir jaunāka nekā Andris”,
„Andris ir jaunāks nekā Kristaps”,
„Kristaps ir jaunāks nekā Jana”.
Līdzīgi kā iepriekš izspriežam, ka arī vienam no šiem apgalvojumiem jābūt aplamam. Tā kā nepareizs ir tieši viens apgalvojums no visiem septiņiem dotajiem, tad nepareizais apgalvojums sastopams gan pirmajā, gan otrajā izdalītajā apgalvojumu grupā. Bet vienīgais apgalvojums, kas sastopams abās šajās grupās, ir „Andris ir jaunāks nekā Kristaps”. Tātad tas ir nepareizs, un sākumā doto 5.apgalvojumu aizstājam ar pareizu: „Andris ir vecāks nekā Kristaps”.
Tagad, pakāpeniski izmantojot 1., 6., 7. un 2.apgalvojumus (kas visi ir pareizi), secinām, ka Andris ir vecāks nekā Edgars, Edgars vecāks nekā Jana, Jana vecāka nekā Kristaps un Kristaps vecāks nekā Baiba.

10. Tā kā visi pirksti un visas rokas ir vienādas, tad komplektus 12; 1; 2 un 12; 2; 1 uzskatām par vienādiem. Tā kā katrai rokai ir vismaz viens pirksts, tad maksimālais vienas rokas pirkstu skaits ir 13.

Apskatīsim visus iespējamos variantus:

13; 1; 1	9; 2; 4	7; 2; 6
12; 1; 2	9; 1; 5	7; 1; 7
11; 2; 2	8; 3; 4	6; 3; 6
11; 1; 3	8; 2; 5	6; 4; 5
10; 2; 3	8; 1; 6	5; 5; 5
10; 1; 4	7; 4; 4	
9; 3; 3	7; 3; 5	

Tātad pavisam kopā ir **19** dažādi cimdu komplekti.