Profesora Cipariņa klubs
6. nodarbības uzdevumu īsi atrisinājumi

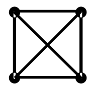
1. Ievērojam, ka, no *vārdu* TWO un ELEVEN burtiem noņemot *vārdu* ONE, paliek *vārdam* TWELVE nepieciešamie burti. Tātad kliņģeris *vārdam* TWELVE kopā maksā $9+16-6=19$ mārciņas.

2. $n^2=\overline{CAUCAU}=1001\cdot\overline{CAU}=7\cdot 11\cdot 13\cdot\overline{CAU}$. Lai n būtu vesels skaitlis, skaitlim $\overline{CAU}$ jāsatur pirmreizinātāji 7, 11 un 13 nepāra pakāpē (vismaz pirmajā pakāpē), kā arī varbūt vēl kādi pirmreizinātāji pāra pakāpē. Bet jau $7\cdot 11\cdot 13=1001>999\geq\overline{CAU}$, tātad tāds naturāls n neeksistē.

3. $202=5a+x\cdot b$, kur a un b ir kastīšu skaits.
Skaitļa $202-5a$ pēdējais cipars ir 2 vai 7, tātad visi skaitļi, kas beidzas ar 2 vai 7 un nepārsniedz 202, var būt $x\cdot b$ vērtības.
Ar gadījumu pārlasi noskaidro, ka x var būt
1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 21, 22, 23, 24, 26, 27, 28, 29, 31, 32, 33, 34, 36, 37, 38, 39, 41, 42, 43, 44, 46, 47, 48, 49, 51, 52, 54, 56, 57, 59, 61, 62, 64, 66, 67, 71, 72, 76, 77, 81, 82, 86, 87, 91, 92, 96, 97, 101, 102, 107, 112, 117, 122, 127, 132, 137, 142, 147, 152, 157, 162, 167, 172, 177, 182, 187, 192, 197, 202
Gadījumu pārlasi var veikt pēc a vērtībām:

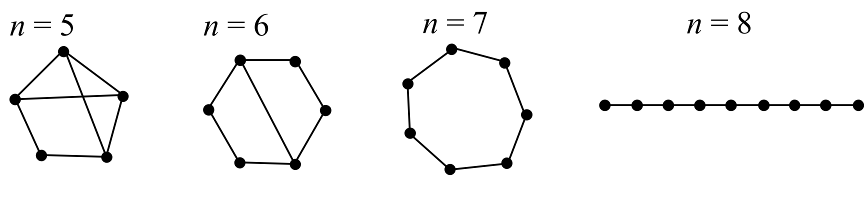
a	$5a$	$xb=202-5a$	Iespējamās x vērtības
1	5	197	1, 197
2	10	192	1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 64, 96, 192
3	15	187	1,187
		...	...

4. a) Pilsētu skaits n var būt no 5 līdz 14.
Lai pierādītu, ka nevar būt mazāk kā 5 pilsētas, pieņemsim pretējo: mums ir 4 pilsētas. Savienojot katru pilsētu ar katru, iegūstam ne vairāk kā 6 ceļus (skat. 1.zīm.), kas ir pretrunā ar uzdevumā doto. Skaidrs, ka, ja Lanlandē būtu vēl mazāk pilsētu, tad būtu arī vēl mazāk ceļu.



1.zīm.

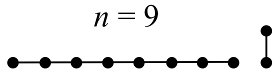
Pierādīsim, ka nevar būt vairāk kā 14 pilsētas: katrs ceļš savieno divas pilsētas, tāpēc 7 ceļi pavisam var savienot ne vairāk kā $2\cdot 7=14$ pilsētas.
Uzdevuma nosacījumiem atbilstoši piemēri ar pilsētu skaitu n = 5; 6; 7; 8 parādīti 2.zīm.



2.zīm.

Lai iegūtu piemērus pārējiem pilsētu skaitiem, rīkosimies šādi: piemērā, kad n = 8, „nojauksim" ceļu starp pēdējām divām pilsētām, izveidosim vēl vienu pilsētu un savienosim to ar pilsētu, uz kuru aizejošo ceļu nojaucām (skat.3.zīm.).

$n = 9$



3.zīm.

Šo procesu turpinām, līdz paliek 7 pilsētu pāri (skat. 4.zīm.)

$n = 10$ $\qquad$ $n = 14$

4.zīm.

b) Vispirms pierādīsim, ka nevar būt vairāk kā 4022 pilsētas. Tā kā katram ceļam ir divi gali, tad, ja pavisam ir 2011 ceļi, tad pilsētu nevar būt vairāk kā $2 \cdot 2011 = 4022$.

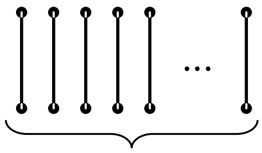
Ja $n \leq 63$, tad ceļu skaits $\leq \dfrac{63 \cdot 62}{2} = 1953 < 2011$.

Tātad pilsētu skaits varētu būt $64 \leq n \leq 4022$.

Vēl jāpierāda, ka šādas n vērtības ir iespējamas.

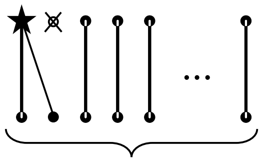
Pieņemsim, ka $n \geq 2012$. Gadījums, kad $n = 4022$, parādīts 5.zīm.

Augšējās rindas pirmo pilsētu apzīmēsim ar zvaigznīti un nosauksim par galvaspilsētu. Tālāk veiksim šādu operāciju: ņemsim pirmo nenosvītroto pilsētu no augšējās rindas (kas nesakrīt ar galvaspilsētu) un nosvītrosim to, bet ceļu, kas šo pilsētu savienoja ar apakšējās rindas pilsētu, vilksim uz galvaspilsētu (skat. 6.zīm.). Pēc katras šādas operācijas pilsētu skaits samazinās par 1, bet ceļu skaits paliek nemainīgs. Šādi var turpināt, kamēr augšējā rindā nenosvītrota palikusi tikai galvaspilsēta (skat. 7.zīm.). Tātad esam parādījuši, ka $2012 \leq n \leq 4022$.



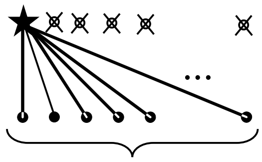
2011 ceļi

5.zīm.



2011 ceļi

6.zīm.



2011 ceļi

7.zīm.

Tagad parādīsim, ka pilsētu skaits var būt no 64 līdz 2011.

Apakšējā rindā atdalīsim pirmās 63 pilsētas un tās neaiztiksim. Šīs 63 pilsētas kopā ar galvaspilsētu nosauksim par kodolu. Kodols ir grafs ar 64 virsotnēm, kurā jau ir novilktas 62 šķautnes. Tajā vēl var novilkt ne vairāk kā $\dfrac{64 \cdot 63}{2} - 63 = 1953$ šķautnes. Veiksim šādu operāciju: ņemsim patvaļīgu pilsētu, kas neatrodas kodolā un nosvītrosim to. Izdzēsīsim arī ceļu, kas šo pilsētu savieno ar galvaspilsētu. Lai nemainītos ceļu skaits, kodolā savienosim divas pilsētas, kas vēl nav savienotas ar ceļu. Tātad pilsētu skaits izpildot šādu darbību samazinās par 1, bet ceļu skaits paliek nemainīgs. Šādi procesu turpina, kamēr visas pilsētas, kas atrodas ārpus kodola, ir nosvītrotas. To vienmēr var izdarīt, jo pilsētu skaits, kas neatrodas kodolā, ir $2011 - 63 = 1948 < 1953$. Šādi iegūsim, ka $64 \leq n \leq 4022$.

5. Atbilde: 49 kamolus.

Ievērosim, ka 25% no 20 kamolu vērtības ir 5 kamolu vērtība, bet 10% no 5 kamolu vērtības ir puse no kamola vērtības. Tad varam sastādīt vienādojumu $5x + 0{,}5y = 12$, kas apraksta akcijas rezultātā nopirkto kamolu daudzumu. Visizdevīgāk meitenēm ir pirkt 20 kamolus un pēc tam apmainīt čeku un saņemt 25% no to vērtības. Lielākā iespējamā x vērtība ir 2, tātad meitenes divas reizes ir pirkušas pa 20 kamoliem. Tālāk iegūstam, ka y ir 4. Tas nozīmē, ka meitenes ir 4 reizes pirkušas pa 5 kamoliem.

Skolotāja meitenēm uzdeva nopirkt 49 dzijas kamolus. Parādīsim ar piemēru, kā meitenes rīkojās:

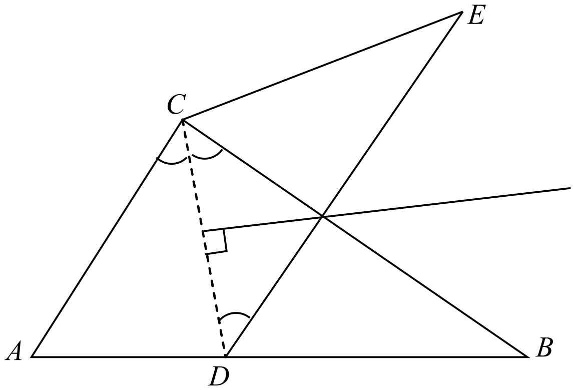
1) meitenes nopērk **40** kamolus un saņem atpakaļ 10 kamolu vērtību;
2) tagad meitenēm ir jānopērk vēl 9 skolotājas prasītie kamoli un no akcijas viņas vēl var nopirkt 10 kamolus;
3) meitenes pērk **15** kamolus un par katriem 5 kamoliem saņem atpakaļ pusi no viena kamola vērtības;
4) meitenēm tagad ir nauda 4 kamoliem, ko iedeva skolotāja un vēl 1,5 kamolu vērtība no akcijas;
5) meitenes pērk **5** kamolus (viņām vēl paliek puse no kamola vērtības) un uzrādot čeku saņem pusi no kamola vērtības;
6) meitenes nopērk vēl **1** kamolu.

Tātad kopā meitenes nopirkušas $40+15+5+1=61$ kamolu, kas ir par 12 vairāk nekā 49.

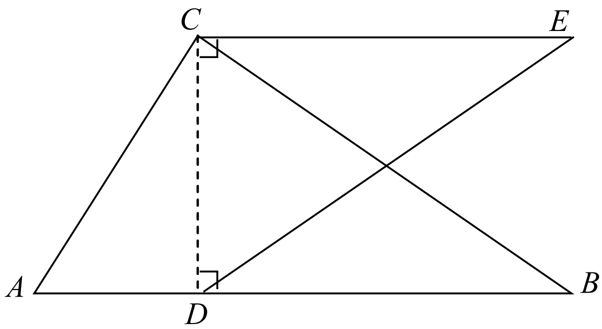
Piezīme. Varam pārbaudīt, ka, gadījumā, ja skolotāja lūdza nopirkt 50 kamolus, meitenes, izmantojot akciju, varēja nopirkt, augstākais, 66 kamolus, t.i., par 16 vairāk; ja skolotāja lūdza nopirkt 48 kamolus, tad patiesībā meitenes varēja nopirkt, augstākais, 59 kamolus, t.i., par 11 vairāk.

6. Atbilde. Abos gadījumos uzdevumā prasīto var izpildīt.

a) Sagriezīsim trijstūri *ABC* pa bisektrisi *CD* (skat. 8.zīm.). Ieguvām divus trijstūrus *ACD* un *BCD*. Trijstūri *BCD* attēlosim simetriski attiecībā pret bisektrises *CD* vidusperpendikulu un iegūsim trijstūri *ECD*. Tā kā $\angle ACD = \angle CDE$, tad $AC \parallel DE$ (jo iekšējie šķērsleņķi ir vienādi) un *ACED* ir trapece ar pamatiem *AC* un *DE* (=*BC*).



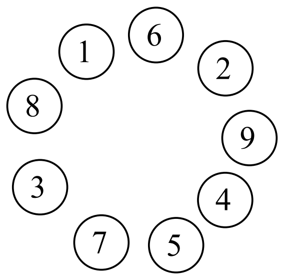
8.zīm.



9.zīm.

b) Sagriezīsim doto trijstūri *ABC* pa tā augstumu *CD* (skat. 9.zīm.), kas atrodas trijstūra iekšpusē (vismaz viens trijstūra augstums atrodas tā iekšpusē). Iegūsim divus trijstūrus *ACD* un *BCD*. Trijstūri *BCD* attēlosim simetriski pret novilktā augstuma *CD* vidusperpendikulu un iegūsim trijstūri *ECD*. Tā kā $\angle ACD = \angle CDE = 90^\circ$, tad $AD \parallel CE$ un *ACED* ir trapece ar sānu malām *AC* un *DE* (=*BC*).

7. Atbilde. Skaitļus prasītajā veidā var ierakstīt (skat. 10.zīm.).



10.zīm.

Parādīsim vienu no veidiem, kā pakāpeniski var izveidot uzdevuma atrisinājumu.

Sastādīsim reizinājumu tabulu skaitļiem no 1 līdz 9:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1		2	3	4	5	**6**	7	**8**	9
2			**6**	**8**	10	**12**	14	16	**18**
3				**12**	15	**18**	21	**24**	27
4					20	**24**	28	32	36
5						30	35	40	45
6							42	48	54
7								56	63
8									72
9									

Katru divu reizinātāju reizinājumu tabulā ierakstām vienu reizi, t.i., ja, piemēram, rūtiņā, kur jāraksta rezultāts reizinājumam 4×7, ierakstām 28, tad rūtiņu, kur jāraksta reizinājums 7×4, atstājam tukšu. Tāpat arī atstājam neaizpildītas rūtiņas, kur jāraksta reizinājumi 1×1, 2×2, 3×3 u.t.t. (tātad – skaitļu kvadrāti), jo šādi reizinājumi mums nav iespējami (pēc uzdevuma nosacījumiem, katrs skaitlis deviņstūra visās virsotnēs kopā sastopams tieši vienu reizi).

Redzam, ka daži reizinājumi tabulā sastopami divas reizes (piemēram, $1\cdot 6 = 2\cdot 3 = 6$; šie reizinājumi tabulā izcelti treknrakstā), bet pārējie – vienu reizi. Kopā ir 26 reizinājumi, kas neatkārtojas, un 5 – kas atkārtojas. Tā kā diagonāļu skaits deviņstūrim ir $\frac{9\cdot 6}{2} = 27 < 5 + 26$, tad uzdevumu, iespējams, var atrisināt.

Atcerēsimies, ka daudzstūra diagonāle ir nogrieznis, kas savieno divas daudzstūra virsotnes, kas **nepieder pie vienas malas**. Tātad, lai skaitlis 6 uz diagonālēm neparādītos divas reizes, tā viens reizinātāju pāris, piemēram, 1 un 6, jānovieto uz blakus esošajām virsotnēm, kuras diagonāle nesavieno, bet otrs pāris – 2 un 3 – uz virsotnēm, kas neatrodas blakus (skaidrs, ka, ja gan 1 un 6, gan 2 un 3 atradīsies viens otram blakus, skaitlis 6 vispār netiks uzrakstīts ne uz vienas diagonāles). Līdzīgā veidā jānovieto arī pārējie skaitļu pāri, kurus sareizinot iegūst vienādus rezultātus. Visi šādi pāri ir:

$6 = 1\cdot 6 = 2\cdot 3$

$8 = 1\cdot 8 = 2\cdot 4$

$12 = 2\cdot 6 = 3\cdot 4$

$18 = 2\cdot 9 = 3\cdot 6$

$24 = 3\cdot 8 = 4\cdot 6$

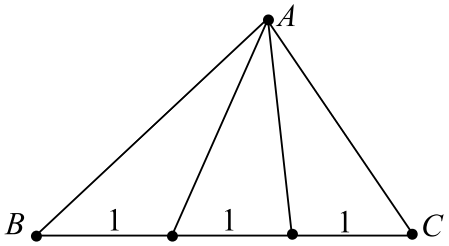
Tātad mums jānovieto dotie deviņi skaitļi tā, lai no katras rindiņas vismaz viens reizinātāju pāris atrastos blakus. Novietojot blakus pirmos reizinātāju pārus, varam iegūt šādu izkārtojumu:

– 3 – 8 – 1 – 6 – 2 – 9 – 4 – 5 – 7 –

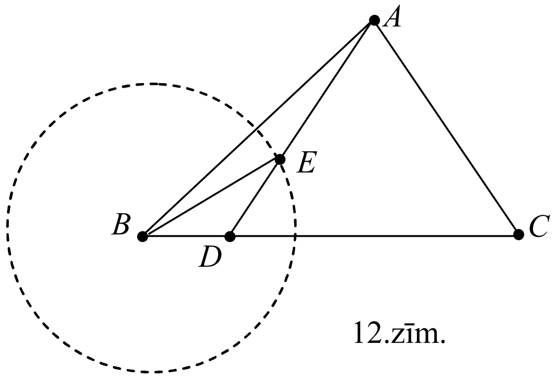
Sakārtojot šos skaitļus regulāra deviņstūra virsotnēs, iegūstam 10.zīm. attēloto situāciju.

8. Atbilde. Atbilde. Doto trijstūri var sagriezt uzdevumā prasītajā veidā.

Ja dotajam trijstūrim ir mala, kuras garums ir vesels skaitlis, tad to var sagriezt vairākos trijstūros tā, kā parādīts 11.zīm.



11.zīm.

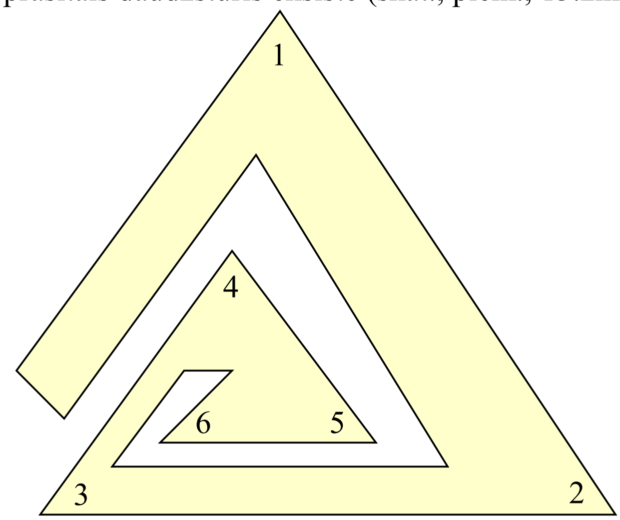


12.zīm.

Ja dotajā trijstūrī nav malas, kuras garums ir vesels skaitlis, un mala AB ir garāka nekā 1 cm, tad uz malas BC atliksim tādu punktu D, lai DC garums būtu vesels skaitlis (ja $BC < 1$, tad uzskatīsim, ka punkts D sakrīt ar punktu C). Novilksim riņķa līniju ar centru punktā B un rādiusu 1 cm (skat. 12.zīm.). Tā kā punkts D atrodas riņķa iekšpusē, bet punkts A – ārpusē, tad riņķa līnija krusto nogriezni AD punktā E.

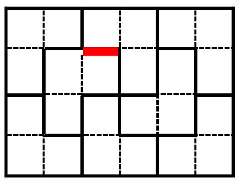
Esam ieguvuši trijstūrus ABE un BED ar malu $BE = 1$ cm, un trijstūri ADC (ja C un D nesakrīt) ar malas garumu CD, kurš ir vesels skaitlis. Trijstūri ADC var sagriezt tā, kā parādīts 7.zīm.

9. Atbilde: uzdevumā prasītais daudzstūris eksistē (skat., piem., 13.zīm.).



13.zīm.

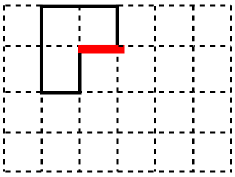
10. Pietiek ievietot 1 barjeru. Vienu piemēru, kā var iztikt ar 1 barjeru, var redzēt 14.zīm.



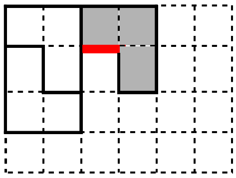
14.zīm.

Pārliecināsimies, ka citu *V-sadalījumu* šim taisnstūrim nav.

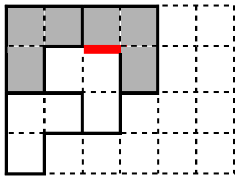
Ja mēs pirmo „stūrīti" ievietosim tā, kā parādīts 15.zīm., tad taisnstūri vispār nevarēsim sadalīt „stūrīšos". Tātad pirmais stūrītis jānovieto, kā redzams 16.zīm. (skat. iekrāsoto „stūrīti"). Ja tālāk augšējā kreisajā stūrī ievietosim „stūrīti" tā, kā parādīts 16.zīm., tad redzam, ka atkal taisnstūri nevarēsim sadalīt prasītajā veidā. Tātad augšējā kreisajā stūrī „stūrītis jāievieto, kā parādīts 17.zīm., jo citos gadījumos radīsies viena izolēta rūtiņa.



15.zīm.

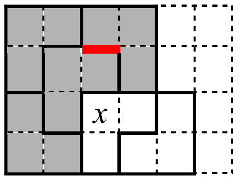


16.zīm.

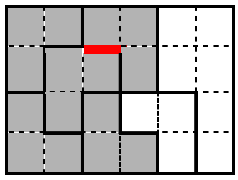


17.zīm.

Nākamo apskatām kreiso apakšējo stūri. Ja tajā „stūrīti” ievietosim, kā parādīts 17.zīm., tad pa starp to un iepriekš iegūto izkārtojumu „stūrīti” varēs ievietot tikai vienā veidā (citos gadījumos radīsies vismaz viena izolēta rūtiņa), bet tad atkal tālāk taisnstūri sadalīt prasītajā veidā nevarēsim. Tātad kreisajā apakšējā stūrī „stūrīšu” izkārtojumam jābūt, kā parādīts 18.zīm.



18.zīm.



19.zīm.

Tālāk apskatām, kā var ievietot „stūrīti” vēl brīvajā taisnstūra apakšējā kreisajā malā – ja to darām, kā parādīts 18.zīm., tad nākamās rūtiņas izvietojums ir stingri noteikts un taisnstūri sadalīt „stūrīšos” tālāk nevar. Tātad šī „stūrīša” novietojumam jābūt, kā redzams 19.zīm. Ja tai blakus esošo stūrīti novietosim, kā redzams šajā zīmējumā, tad atkal tālāk sadalījumu iegūt nevaram. Tātad nākamie „stūrīši” jāievieto, kā bija redzams 14.zīm.