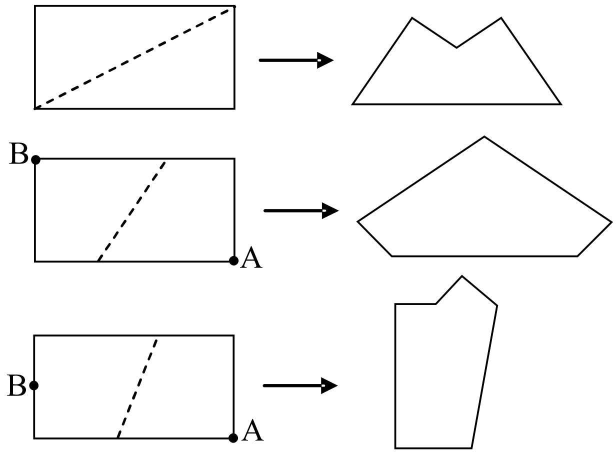
„Profesora Cipariņa kluba” 1. nodarbība 2011./2012. mācību gadā
Uzdevumu īsi atrisinājumi.

**1.** Uzdevumā aprakstītajā veidā var iegūt visas zīmējumā redzamās figūras (skat. 1.zīm.; punkts *A* tiek savienots ar punktu *B*).




1.zīm.

**2.** Tā kā $0{,}33 = \frac{33}{100} < \frac{m}{n}$, tad $100m > 33n$. Tā kā $n$ – naturāls skaitlis, $100m \geq 33n + 1$.

Līdzīgi arī no $\frac{m}{n} < \frac{1}{3}$ iegūstam, ka $n > 3m$ un $n \geq 3m + 1$. Ievietojam šo $n$ novērtējumu pirmās rindiņas nevienādībā: $100m \geq 33(3m + 1) + 1 = 99m + 33 + 1 = 99m + 34$, no kurienes $m \geq 34$. Tāpēc $n \geq 3 \cdot 34 + 1 = 103$.

Tā kā $\frac{33}{100} < \frac{34}{103} < \frac{1}{3}$. Tātad uzdevumā prasītais mazākais naturālais $n$ ir 103, kam atbilstošais $m = 34$.

**3.** Apzīmēsim Līgas bērnu vecumus ar $a + 1$, $b + 1$, $c + 1$ un $d + 1$. Tā kā viņu vecumi ir dažādi veseli skaitļi no 2 līdz 16, tad varam pieņemt, ka

$$1 \leq a < b < c < d \leq 15.$$

Ievērojam, ka $b \leq 13$, tātad $b - a \leq 12$.

Informāciju par bērnu vecumiem pirms gada var pierakstīt ar vienādojumu $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

Savukārt informāciju par bērnu vecumiem pēc gada var pierakstīt kā vienādojumu $(d + 2)^2 + (a + 2)^2 = (b + 2)^2 + (c + 2)^2$, kuram atverot iekavas iegūstam $d^2 + 4d + 4 + a^2 + 4a + 4 = b^2 + 4b + 4 + c^2 + 4c + 4$. Atņemot no šī vienādojuma pirmo vienādojumu, kas apraksta bērnu vecumus pirms gada, iegūstam $4d + 4a + 8 + a^2 = 4b + 4c + 8 - a^2$.

Izsakām no šīs vienādības $a^2$: $2a^2 = 4(b + c - a - d)$, tātad $a^2 = 2(b + c - a - d)$. Iegūstam, ka skaitļa $a$ kvadrāts ir pāra skaitlis, tātad arī pašam skaitlim $a$ jābūt pāra skaitlim. Turklāt tā kā $d > c$, tad $c - d < 0$. Tāpēc iegūto izteiksmi varam uzrakstīt $a^2 = 2(b - a + (c - d)) < 2(b - a) < 24$.

Tātad ir tikai divas iespējamās $a$ vērtības, t.i., vai nu $a = 2$ vai $a = 4$.

Pārbaudīsim katru no šīm vērtībām:

- Ja $a = 4$, tad no tā, ka $a^2 < 2(b - a)$ iegūstam, ka $2b > a^2 + 2a = 24$, tātad $b > 12$. Tad noteikti $b = 13$, $c = 14$, $d = 15$. Bet šādas bērnu vecumu vērtības neapmierina nevienu no dotajām vecumu sakarībām, tātad $a \neq 4$.
- Ja $a = 2$, tad $b + c - d = 4$. Izsakām $d = b + c - 4$; šo un $a$ vērtību ievietojam pirmajā vienādojumā, kas izsaka bērnu vecumu sakarību pirms gada un pakāpeniski iegūstam:

  $$\cancel{b^2} + \cancel{c^2} + 16 + 2bc - 8b - 8c = 4 + \cancel{b^2} + \cancel{c^2}$$
  $$2bc - 8b - 8c + 12 = 0 \quad |:2$$
  $$bc - 4b - 4c + 6 + 10 - 10 = 0$$
  $$b(c - 4) - 4(c - 4) = 10$$
  $$(b - 4)(c - 4) = 10$$

  Tā kā $b - 4$ un $c - 4$ ir veseli skaitļi no $-2$ līdz 10, tad skaitli 10 var izteikt kā divu veselu skaitļu reizinājumu tikai divos veidos: $10 = 10 \cdot 1$ un $10 = 5 \cdot 2$. Tā kā $c > b$ un $d = b + c - 4$, ir divas iespējas:

  $c = 14$, $b = 5$ un $d = 15$ vai
  $c = 9$, $b = 6$, $d = 11$.

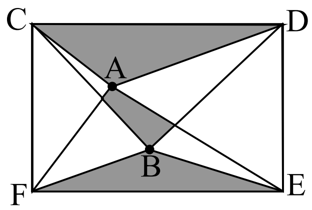
  Abas šīs iespējas apmierina uzdevuma nosacījumus. Tātad ir divi iespējamie gadījumi, kādi var būt Līgas bērnu vecumi: $(3, 6, 15, 16)$ un $(3, 7, 10, 12)$.

**4.** Visu trīs nezināmo skaitļu summa ir 22. Ja mēs pie pirmā skaitļa pieskaitītu 0,5, tad kopējā visu skaitļu summa arī palielinātos par 0,5. Savukārt, ja no otrā skaitļa atņemtu 1,5, tad summa arī samazinātos par 1,5. Tātad, izdarot minētās darbības ar skaitļiem, visu trīs skaitļu summa būtu $22 + 0{,}5 - 1{,}5 = $ **21**.
Tagad uzdevuma noteikumus varētu formulēt šādi: „Trīs skaitļu summa vienāda ar 21, pirmie divi skaitļi ir vienādi, trešais ir 2,5 reizes mazāks nekā pārējie skaitļi.”
No šejienes seko, ka trešais skaitlis ir $2 \cdot 2{,}5 = 5$ reizes mazāks nekā pirmā un otrā skaitļa summa (t.i., pirmā un otrā skaitļa summas un trešā skaitļa attiecība ir 5:1), tātad trešais skaitlis ir $21 : 6 = 3{,}5$. Tad pirmais un otrais izmainītais skaitlis ir $3{,}5 \cdot 2{,}5 = 8{,}75$.
Tātad sākotnējie skaitļi ir šādi:

- pirmais skaitlis: $8{,}75 - 0{,}5 = $ **8,25**;
- otrais skaitlis ir $8{,}75 + 1{,}5 = $ **10,25**;
- trešais skaitlis ir **3,5**.

*Piezīme.* Uzdevuma formulējumu varētu pierakstīt arī kā vienādojumu $(x - 0{,}5) + (x + 1{,}5) + x : 2{,}5 = 22$, kuru atrisinot iegūst prasītos skaitļus.

**5.** Ievērojam, ka trijstūru *CAF*, *DAE*, *CBF* un *DBE* (skat. 2.zīm.) laukumu summa vienāda ar taisnstūra *CDEF* laukumu, jo gan pirmo divu trijstūru, gan otro divu trijstūru laukumu summas vienādas ar pusi no taisnstūra laukuma.
No otras puses, visu augšminēto trijstūru laukumu summa vienāda ar balto figūru un divkāršotu iesvītroto figūru laukumu summu.
Analoģiski trijstūru *CAD*, *FAE*, *CBD* un *FBE* laukumu summa vienāda gan ar visa taisnstūra laukumu, gan arī ar balto figūru un divkāršotu iekrāsoto figūru laukumu summu. No šiem apgalvojumiem arī izriet uzdevumā prasītais.



2.zīm.

**6.** Punkta $A$ koordinātas var pierakstīt kā $(a; 2a+3)$ un punkta $B$ koordinātas var pierakstīt kā $(b; b+2)$. Tad nogriežņa $AB$ viduspunkta $M$ koordinātas var pierakstīt kā $\left(\frac{a+b}{2}; \frac{(2a+3)+(b+2)}{2}\right)$. Tā kā punkta $M$ atbilstošās koordinātas ir zināmas, varam sastādīt vienādojumu sistēmu:

$$\begin{cases} \frac{a+b}{2} = 4 \\ \frac{(2a+3)+(b+2)}{2} = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=8 \\ 2a+b=13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=5 \\ b=3 \end{cases}.$$

Tātad punktu $A$ un $B$ koordinātas ir attiecīgi $A(5;13)$ un $B(3;5)$.

Taisnes, kas iet caur šiem punktiem, vienādojums vispārīgā formā ir $y = kx + m$, ievietojot attiecīgās punktu $A$ un $B$ koordinātas, atkal iegūstam vienādojumu sistēmu:

$$\begin{cases} 13 = 5k + m \\ 5 = 3k + m \end{cases},$$

kuras atrisinājums ir $\begin{cases} k = 4 \\ m = -7 \end{cases}$. Tātad meklētās funkcijas vienādojums ir $y = 4x - 7$.

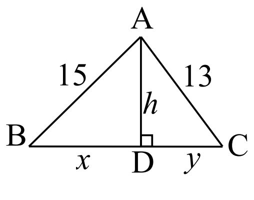
**7.** Tā kā kartupeļu lauka platība ir 10 800 m$^2$, tad Ansis vienā stundā norok 3600 m$^2$, Jānis – 2700 m$^2$, Kristaps – 1800 m$^2$.

Apzīmēsim ar $t$ laiku stundās, kādā visu lauku noraktu visi 3 kaimiņi kopā. Tad $3600t + 2700t + 1800t = 10800$, no kurienes iegūstam $t = \frac{4}{3}$. Tātad visu lauku kaimiņi noraktu 80 minūtēs. Tātad puse lauka jeb 5400 m$^2$ būs norakta 40 minūtēs.

Ar $z$ apzīmējam laiku stundās, kas nepieciešams Ansim un Kristapam, lai kopā noraktu atlikušos 5400 m$^2$ lauka. Tad $3600z + 1800z = 5400$, no kurienes $z = 1$.

Tātad kopējais laiks, kas nepieciešams visu kartupeļu novākšanai, ir $40 + 60 = 100$ minūtes.

**8.** Apzīmējam $AD = h$, $BD = x$, $CD = y$ (skat. 3. zīm.).



3.zīm.

Tā kā dots, ka $S_{\Delta ADC} = 30$, tad $30 = \frac{1}{2} \cdot h \cdot y$ un

$$h \cdot y = 60 \qquad (1)$$

No Pitagora teorēmas taisnleņķa trijstūrim $ADC$ seko

$$h^2 + y^2 = 169 \quad (2)$$

Saskaitot divkāršotu vienādojumu (1) ar vienādojumu (2), pakāpeniski iegūstam

$$2hy + h^2 + y^2 = 120 + 169$$
$$h^2 + y^2 + 2hy = 289$$
$$(h + y)^2 = 289$$
$$|h + y| = 17$$

Tā kā $h$ un $y$ ir malu garumi, tad $h + y = 17$.
Līdzīgā veidā no vienādojuma (2) atņemot divkāršotu vienādojumu (1), iegūstam

$$h^2 + y^2 - 2hy = 169 - 120$$
$$h^2 + y^2 - 2hy = 49$$
$$(h - y)^2 = 49$$
$$|h - y| = 7$$

Iegūstam divas nevienādību sistēmas: $\begin{cases} h + y = 17 \\ h - y = -7 \end{cases}$ un $\begin{cases} h + y = 17 \\ h - y = 7 \end{cases}$.

Atrisinot pirmo sistēmu, iegūstam $h = 5$ un $y = 12$. Ja $h = 5$, tad no Pitagora teorēmas taisnleņķa trijstūrim $ABD$ seko, ka $x^2 = 225 - 25 = 200$, tātad $x$ ir irracionāls skaitlis un tāpēc arī laukums trijstūrim $ABC$ arī ir iracionāls skaitlis. Tātad šī $h$ vērtība neder par dotā uzdevuma atrisinājumu.
Atrisinot otro sistēmu, iegūstam $h = 12$ un $y = 5$. Ja $h = 12$, tad līdzīgi kā iepriekš iegūstam, ka $x^2 = 225 - 144 = 81$. Tā kā $x$ ir trijstūra malas garums, tad tas ir pozitīvs skaitlis, tāpēc $x = 9$. Tātad $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot (9 + 5) \cdot 12 = 84$ cm$^2$.

**9.** Sākumā pierādīsim, ka tad, ja $n$ ir patvaļīgs pāra skaitlis, vienmēr uzvar pirmais spēlētājs, t.i., Dace. Patiešām, ar pirmo gājienu viņa uzliek savu kauliņu uz divām vidējām spēles galda rūtiņām, tādējādi sadalot spēles galdus divās „pusēs”. Tālāk savus gājienus Dace veic simetriski Anda gājieniem attiecībā pret spēles galda centru. Tādā veidā, ja Andis var veikt gājienu, tad otrā galdiņa „pusē” Dace arī var uzlikt savu spēles kauliņu.
Tāpēc **a)**, **c)** un **d)** gadījumā uzvar Dace.
Apskatīsim **b)** gadījumu, t.i., ja $n$ = 9. Pierādīsim, ka šajā gadījumā uzvar Andis.
Apzīmēsim spēles galda rūtiņas sākot no kreisās puses ar $x_1$, $x_2$, ..., $x_9$ (skat. 4. zīm.).

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | $x_8$ | $x_9$ |

4.zīm.

Apskatīsim vairākus gadījumus:

- Pieņemsim, ka Dace ar savu pirmo gājienu uzlikusi kauliņu uz $x_1$ un $x_2$. Tad atliek spēles laukums ar izmēru $7 \times 1$, uz kura pirmais savu kauliņu liks Andis. Ja viņš savu kauliņu novieto uz $x_3$ un $x_4$ (vai arī uz $x_8$ un $x_9$ – šis gadījums apskatāms analoģiski), tad atliek spēles laukums ar izmēru $5 \times 1$, turklāt nākamā gājienu veic Dace. Viegli pamatot, ka uz šāda izmēra laukuma vienmēr uzvar spēlētājs, kas savu gājienu izdara otrais. Tātad uzvar Andis.

- Pieņemsim, ka Dace savu kauliņu sākumā novieto uz $x_2$ un $x_3$. Pa kreisi no šī kauliņa nevar novietot nevienu kauliņu, bet pa labi ir spēles laukums ar izmēru $6 \times 1$, uz kura pirmais savu kauliņu liks Andis; kā jau mēs iepriekš apskatījām, tad, ja galdiņa garums ir pāra skaitlis, vienmēr uzvar spēlētājs, kas pirmais veic gājienu, šajā gadījumā – Andis.
- Pieņemsim, ka Dace savu pirmo spēles kauliņu novieto uz $x_3$ un $x_4$. Pa kreisi paliek vieta, kur uzlikt tieši vienu kauliņu, bet pa labi – spēles galdiņš ar izmēru $5 \times 1$, bet uz šāda laukuma uzvar spēlētājs, kas otrais veic gājienu. Tātad, ja Andis savu kauliņu novieto, piemēram, uz $x_1$ un $x_2$, tad Dace pirmā izdara gājienu uz atlikušā $5 \times 1$ lauka, tātad atkal uzvar Andis.
- Visbeidzot pieņemsim, ka Dace pirmo kauliņu novieto uz $x_4$ un $x_5$ (pārējie Daces sākuma gājieni ir simetriski šim un iepriekš apskatītajiem gadījumiem). Tad pa kreisi atliek trīs rūtiņas, bet uz tām var nolikt tikai vienu spēles kauliņu. Pa labi no Daces novietotā kauliņa ir spēles laukums ar izmēru $4 \times 1$. Ja Andis novieto savu spēles kauliņu uz $x_6$ un $x_7$ vai $x_8$ un $x_9$, tad uz spēles galda vēl var novietot tieši divus kauliņus. Tā kā Dace veic nākamo gājienu, tad pēc tam paliks vieta, kur novietot tikai vienu – Anda – kauliņu.

Esam apskatījuši visus iespējamos variantus, kā Dace var sākt spēli, ja $n = 9$; tātad varam secināt, ka jebkurā gadījumā uzvar Andis.

**10.** No uzdevuma nosacījumiem izriet: ja $A$ un $B$ ir draugi, tad jebkurš no pārējiem valsts iedzīvotājiem ir vai nu viņu kopīgs draugs, vai arī kopīgs ienaidnieks; pretējā gadījumā viņi visi trīs nevarētu salabt.

Apskatīsim visus $A$ draugus. No iepriekšminētā apgalvojuma secinām, ka viņi visi draudzējas arī savā starpā un ir ienaidnieki ar visiem pārējiem valsts iedzīvotājiem.

Pieņemsim, ka $A$ un visi viņa draugi pēc kārtas sastrīdas ar visiem saviem draugiem un salabst ar visiem saviem ienaidniekiem. Šo darbību rezultātā izrādīsies, ka visi valsts iedzīvotāji savā starpā draudzējas.

Patiešām, ja $A$ pirmais sastrīdas ar visiem saviem draugiem un salabst ar ienaidniekiem, bet pēc tam visi viņa bijušie draugi ar viņu atkal ir salabst, bet bijušie ienaidnieki ir kļuvuši $A$ draugi un tātad arī draugi savā starpā.