„Profesora Cipariņa kluba” 2. nodarbība 2011./2012. mācību gadā
Uzdevumu īsi atrisinājumi.

1. Prasītajā veidā var izteikt visus piecpadsmit pirmos naturālos skaitļus.
Skaitļus no 1 līdz 4 var izteikt šādi (ja ir mazāk nekā četri saskaitāmie, trūkstošo vietā raksta 0^2):

$1 = 1^2$;
$2 = 1^2 + 1^2$;
$3 = 1^2 + 1^2 + 1^2$;
$4 = 2^2$.

Skaitļus no 5 līdz 8 var viegli iegūt, pieskaitot 2^2 pie šiem jau iegūtajiem skaitļiem:

$5 = 1^2 + 2^2$;
$6 = 1^2 + 1^2 + 2^2$;
$7 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2$;
$8 = 2^2 + 2^2$.

Skaitli 9 izsakām kā $9^2 = 3^2$. Savukārt skaitļus no 10 līdz 15 iegūst, skaitļa 9 izteiksmei pieskaitot attiecīgi skaitļu 1, 2, 3, 4, 5 un 6 izteiksmes:

$10 = 1^2 + 3^2$;
$11 = 1^2 + 1^2 + 3^2$;
$12 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 3^2$;
$13 = 2^2 + 3^2$;
$14 = 1^2 + 2^2 + 3^2$;
$15 = 1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2$.

Piezīme. Franču matemātiķis Lagranžs jau 1770. gadā pierādīja, ka jebkurš naturāls skaitlis var tikt uzrakstīts kā četru veselu skaitļu kvadrātu summa.

2. Apzīmēsim ar P, N, G un F attiecīgi Paskāla, Ņūtona, Galileja un Fermā iegūto punktu skaitu. Tad uzdevumā dotās sakarības var pierakstīt vienādojumu veidā:

$$\frac{P+N}{2} = 16;$$
$$\frac{P+F}{2} = 13;$$
$$\frac{N+F}{2} = 18.$$

Pareizinot vienādojumu abas puses ar 2, iegūstam vienādojumus

$P + N = 32$
$P + F = 26$
$N + F = 36$

Saskaitot šos vienādojumus, iegūstam:

$2P + 2N + 2F = 94$,

tātad $P + N + F = 47$.

Tā kā $\frac{P+N+F+G}{4} = 16$, tad $P + N + F + G = 64$. Ievietojot $P + N + F = 47$ iegūtajā vienādojumā, iegūstam $47 + G = 64$. No šejienes $G = 17$.

3. Sākumā izmantosim to, ka *10-horizontāli* ir skaitļa *4-horizontāli* dalītājs. Tā kā $23705 = 5 \cdot 11 \cdot 431$, tad skaitļa 23705 dalītāji ir 1, 5, 11, 55, 431, 2155, 4741 un 23705. No šiem tikai skaitlim 431 ir 3 cipari, tātad **10-*horizontāli* ir 431**.

Zinām, ka 5-*vertikāli* dalās ar 36 un sākas ar 5. Šis skaitlis var būt 504, 540 vai 576. Bet 8-*horizontāli* sastāv no 1, 4, 6, 8 un 9 (jo skaitļos *4-horizontāli* un *8-horizontāli* kopā katrs cipars ir izmantots tieši vienu reizi), tātad 540 neder. Lai noskaidrotu 5-*vertikāli* vērtību, izmantosim to, ka 9-*vertikāli* ir skaitļa 5-*vertikāli* dalītājs. Skaitlis 9-*vertikāli* sastāv no 2 cipariem un beidzas ar 3. Pārbaudīsim, vai kādam no skaitļiem 504 un 576 ir dalītājs, kas atbilst skaitlim 9-*vertikāli*:

$$504 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 7$$
$$576 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3$$

Redzam, ka skaitlim 576 nav divciparu dalītāja, kas beigtos ar 3, bet skaitlim 504 šāds dalītājs ir 63. Tātad **5-*vertikāli* ir 504** un **9-*vertikāli* ir 63**.

Tagad izmantosim 2) nosacījumu: 4 · (23705 – *4-vertikāli* + 5) = *1-vertikāli*. Tātad 4 ·4-*vertikāli* = 94840 – 1-*vertikāli*. No šīs izteiksmes secinām, ka skaitļa 4 ·4-*vertikāli* pēdējais cipars ir 6, tātad skaitļa 4-*vertikāli* pēdējais cipars ir 4 vai 9. Tā kā katru ciparu drīkst izmantot tieši divas reizes, bet abi četrinieki jau ierakstīti krustskaitļu mīklas rūtiņās, tad 4-*vertikāli* pēdējais cipars noteikti ir 9.

4-*vertikāli* vidējais cipars var būt 1, 2, 5, 6, 7, 8 vai 9 (cipars 0 jau ir izmantots divas reizes). Pakāpeniski pārbaudot šīs vērtības, ievietojot katru reizi iegūto skaitli 4-*vertikāli* izteiksmē 1-*vertikāli* = 4 · (23705 – *4-vertikāli*) + 5, redzam, ka vienīgais derīgais cipars ir 8. Tātad **4-*vertikāli* ir 289**.

Atlikušajās rūtiņās var ievietot ciparus 1, 2, 5 un 7. Skaitlis 1-*horizontāli* ir trīsciparu skaitlis, kas dalās ar 36 un sākas ar 9. Vienīgā iespēja no atlikušajiem cipariem izveidot šādu skaitli, ir, ja izmanto ciparus 7 un 2, t.i., **1-*horizontāli* = 972**.

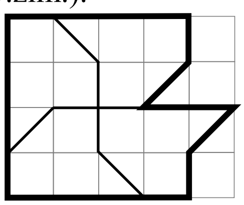
Skaitļa 8-*horizontāli* trūkstošais cipars ir 1, jo visi pārējie cipari jau ir izmantoti 4-*horizontāli* un 8-*horizontāli.* Tāpēc atlikušais skaitlis **7-*horizontāli* ir 50**.

Atrisināto krustskaitļu mīklu skat. 1.zīm.

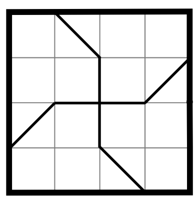
	1 **9**	*2* **7**	*3* **2**	
4 **2**	**3**	**7**	**0**	*5* **5**
6 **8**	**6**		*7* **5**	**0**
8 **9**	**8**	*9* **6**	**1**	**4**
	10 **4**	**3**	**1**	

1. zīm.

4. Attēloto figūru var sagriezt, piemēram, tādās daļās, kā parādīts 2.zīm., no kurām var salikt kvadrātu (skat. 3.zīm.).



2. zīm.

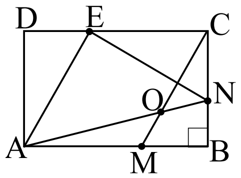


3. zīm.

5. Var ievērot, ka burti sadalīti grupās pēc tā, vai to pieraksts veido simetrisku (aksiāli vai centrāli) figūru vai nē. Simetriskās figūras sadalītas 1., 2. un 3.grupā, bet nesimetriskās – 4.grupā.
Figūras, kurām ir **tikai** vertikālā simetrijas ass, atrodas 1.grupā; figūras, kurām ir **tikai** horizontālā simetrijas ass, atrodas 2.grupā. Centrāli simetriskas figūras (tātad arī tās, kurām ir gan horizontālā, gan vertikālā simetrijas ass) atrodas 3.grupā.
Pēc šī paša principa sadalot latviešu alfabēta burtus, iegūstam šādu sadalījumu:

1. grupa: A Ā Ī M T U Ū V
2. grupa: B C D E K
3. grupa: H I N O S Z
4. grupa: Č Ē F G Ģ J Ķ L Ļ Ņ P R Š Ž

6. Atliksim punktu *D* tā, lai izveidojas taisnstūris *ABCD* (skat. 4.zīm.), un punktu *E* uz taisnstūra malas *DC* tā, lai $AE \parallel CM$.



4. zīm.

Savienojot ar taisnes nogriezni punktus *E* un *N*, iegūst taisnleņķa trijstūri *ECN*.
Tā kā *ABCD* – taisnstūris un pēc dotā $AM = CB$, tad $AM = AD$. Un tā kā *AECM* – paralelograms (tā pretējās malas pa pāriem paralēlas), tad $EC = AM = AD$.
Savukārt $DE = DC - EC = AB - AM = MB = CN$. Tā kā $EC = AD$ un $DE = CN$, tad taisnleņķa trijstūri *ECN* un *ADE* vienādi pēc pazīmes *kk*. Tātad arī to hipotenūzas ir vienādas, t.i., $AE = EN$ un trijstūris AEN - vienādsānu.
Leņķu DEA un CEN summa ir 90°, tātad $\angle AEN = 90^\circ$ un $\angle EAN = 45^\circ$. Tā kā $\angle EAN$ un $\angle CON$ – kāpšļu leņķi pie paralēlām taisnēm, tad tie ir vienādi, t.i., $\angle CON = 45^\circ$, k.b.j.

7. Varam pieņemt, ka skaitlis, kas atbilst abu skolotāju dzimšanas gadam, nav mazāks nekā 1911 un nav lielāks par 1993 (pretējā gadījumā skolotājām būtu vai nu vairāk nekā 100 gadi, vai arī viņas būtu nepilngadīgas).
Ar x apzīmēsim mācību grāmatas lappušu skaitu, kas izņemtas līdz skolotājas nomaiņai. Šo lappušu numuru summa vienāda ar $\frac{x(x+1)}{2}$.

Tātad varam sastādīt nevienādību sistēmu: $\begin{cases} \frac{x(x+1)}{2} \geq 1911 \\ \frac{x(x+1)}{2} \leq 1993 \end{cases}$. Vienīgā naturālā x vērtība, kas apmierina šīs abas nevienādības, ir 62. Tātad Sandras iepriekšējā skolotāja dzimusi 1953. gadā.
Ja ar y apzīmējam grāmatas visu lappušu skaitu, tad jaunās skolotājas dzimšanas gads vienāds ar $\frac{y(y+1)}{2} - 1953$. Atkal sastādām nevienādību sistēmu

$$\begin{cases} \dfrac{y(y+1)}{2} - 1953 \geq 1911 \\ \dfrac{y(y+1)}{2} - 1953 \leq 1993 \end{cases}$$
, par kuras vienīgo atrisinājumu naturālos skaitļos der $y = 88$. Tātad jaunā skolotāja dzimusi 1963.gadā, un viņa ir par 10 gadiem jaunāka nekā iepriekšējā skolotāja.

8. Ja ar regulārajiem daudzstūriem plakne ir pilnībā pārklāta, tad to leņķu summai, kas atrodas ap kopīgo virsotni, jābūt 360°. Regulāra daudzstūra visu leņķu lielumi ir vienādi, tātad tiem jābūt skaitļa 360 veseliem dalītājiem.
Varam sastādīt tabulu, kur attēloti regulāru *n*-stūru leņķu lielumi:

n	Leņķa lielums
3	60°
4	90°
5	108°
6	120°
8	135°
9	140°
10	144°
...	

Redzam, ka 360 dalās tikai ar 60, 90 un 120. Tātad plakni var pārklāt ar regulāriem trijstūriem, četrstūriem vai sešstūriem.

9. a) Kopējā zināmā sešu vērtējumu summa bija 55. Tā kā jānoņem viens augstākais vērtējums, tad noteikti jāatmet 10. Ja septītais tiesnesis būtu ielicis Annai vērtējumu 10, tad Annas kopējais vērtējums (ņemot vērā arī „atmesto” zemāko vērtējumu) būtu 47, kas ir pretrunā ar doto. Atņemot no zināmo sešu punktu kopsummas augstāko jau zināmo vērtējumu – 10, iegūst kopsummā 45, kas ir dotais Annas kopējais vērtējums. Tātad septītā tiesneša vērtējums ir zemākais; tas var būt jebkurš naturāls skaitlis no 1 līdz 8.
b) Zināmo punktu kopsumma ir 39. Ja pārējie divi vērtējumi nav lielāki par 8, tad augstākais vērtējums – 9 – tiek „atmests”, un Kates kopējais vērtējums ir ne lielāks kā $4 \cdot 8 + 7 = 39$. Tātad no viena no tiesnešiem Kate ieguva 9 vai 10, kas tika „atmests”. Tā kā tagad Katei ir 39 punkti, viņai jāiegūst vēl viens punkts no pēdējā tiesneša. To var izdarīt, ja zemākais vērtējums – 7 – tiek atmests, bet tā vietā viņa iegūst 8 no pēdējā tiesneša. Tātad viens no pārējo divu tiesnešu vērtējumiem bija 9 vai 10, bet otrs – 8.
c) Šķirosim gadījumus, atkarībā no tā, vai Zaiga ieguva 10 punktus vai nē:

- Pieņemsim, ka Zaiga neieguva nevienu vērtējumu 10. Tad 9 ir augstākais vērtējums, kas tika „atmests. Tā kā visu tiesnešu vērtējumi bija dažādi, Zaiga kopsummā iegūt 27 punktus varēja vienā no diviem gadījumiem:
  - Ja vērtējums 2 nav zemākais, tad $2 + 5 + 8 + * + * = 27$ (ar * apzīmējam nezināmos vērtējumus); tātad divu nezināmo vērtējumu summai jābūt 12, bet šie vērtējumi nedrīkst būt 1, 2, 5, 8, 9 vai 10. Bet nekādu divu skaitļu 3, 4, 6 un 7 summa nav 12.
  - Ja vērtējums 2 ir zemākais, tad $5 + 8 + * + * + * = 27$; tātad trīs nezināmo vērtējumu summai jābūt 14, bet nedrīkst būt 1, 2, 5, 8, 9 vai 10. Vienīgā iespēja ir $3 + 4 + 7 = 14$.

- Pieņemsim, ka Zaiga ieguva 10 punktus. Tā kā visi vērtējumi bija dažādi, tad 10 tika „atmests”. Kopējais vērtējums 27 varēja tikt iegūts vienā no šiem veidiem:
    - Ja 2 nav zemākais vērtējums, tad $2+5+8+9+*=27$; tātad $*=3$, kas ir atļauta vērtība.
    - Ja 2 ir zemākais vērtējums, tad $5+8+9+*+*=27$; tad diviem nezināmajiem vērtējumiem summā jābūt 5, bet tie nedrīkst būt 1, 2, 5, 8, 9 vai 10. Tas nav iespējams, jo nekādu divu skaitļu 3, 4, 6 un 7 summa nav 5.

Tātad Zaigas priekšnesuma pārējo trīs tiesnešu vērtējumi varēja būt 3, 4, un 7 vai 1, 3 un 10.

10. 1) Pieņemsim, ka nosmērējies ir viens pasažieris. Viņš redz, ka pārējo pasažieru sejas ir tīras. Bet, tā kā vagonā kāds ir nosmērējies, tad tas ir viņš. Tāpēc viņš jau pirmās stāvēšanas laikā iet mazgāties. Bet uzdevumā teikts, ka visi pasažieri bija tīri tikai pēc 4 vilciena pieturām.
2) Pieņemsim, ka vagonā ir divi nosmērējušies pasažieri. Katrs no viņiem spriež tā: „Es redzu vienu pasažieri ar netīru seju. Ja es esmu tīrs, tad viņš pirmajā pieturā dosies mazgāties”. Bet pieturā neviens pasažieris neiet mazgāties. Tad abi nosmērējušies pasažieri turpina spriest tā: „Tātad netīrais pasažieris, kuru es redzu, nebija pārliecināts, ka ir nosmērējies; bet tad viņš noteikti domā, ka netīrs esmu es, jo arī viņš redz, ka visi pārējie ir tīri.” Otrajā pieturvietā abi netīrie pasažieri dodas mazgāties. Tātad jau pēc divām pieturām visi vagona pasažieri bija tīri, bet tas ir pretrunā ar uzdevuma nosacījumiem.
3) Pieņemsim, ka nosmērējušies ir trīs pasažieri. Katrs no viņiem domā: „Es redzu divus netīrus pasažierus. Ja es esmu tīrs, tad pārējie divi aizies mazgāties otrajā apstāšanās reizē” (sk. 2. gadījumu). Bet otrajā pieturā neviens negāja mazgāties, tāpēc visi netīrie pasažieri bija pārliecināti, ka arī ir netīri, un trešajā pieturā aizgāja mazgāties. Tātad pēc trim pieturām visi pasažieri bija tīri, bet tas atkal ir pretrunā ar uzdevuma nosacījumiem.
4) Pieņemsim, ka nosmērējušies ir četri pasažieri. Katrs no viņiem redz trīs netīrus pasažierus un veic tādus pašus spriedumus kā iepriekšējā gadījumā. Viņi gaida trešo pieturvietu, bet, kad tajā neviens pasažieris neiet mazgāties, visi četri netīrie pasažieri saprot, ka ir netīri un dodas mazgāties. Tādā veidā pēc 4 pieturām visi pasažieri ir tīri, kas atbilst uzdevuma nosacījumiem.
Gadījumā, ja nosmērējušies vairāk nekā četri pasažieri, veicot analoģiskus spriedumus, var pārliecināties, ka būs nepieciešamas vairāk nekā 4 pieturas, lai visi atkal būtu tīri.