„Profesora Cipariņa kluba” 3. nodarbība 2011./2012. mācību gadā
Uzdevumu īsi atrisinājumi.

1. Vienkāršojot izteiksmi $\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)$, iegūstam $\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{6}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n+1}{n}$.
Redzam, ka katru divu daļu reizinājumā *saīsinās* vienas daļas saucējs un otras daļas skaitītājs. Pēc visām saīsināšanām, skaitītājā paliek tikai $n+1$, bet saucējā 2. Tātad iegūstam, ka dotās izteiksmes vērtība vienāda ar $\frac{n+1}{2}$. No šejienes redzam, ka daļa ir vesels skaitlis tad un tikai tad, ja n ir nepāra skaitlis.

2. Izmantosim šādu sakarību: ja taisnstūris ir sadalīts četros taisnstūros, kuru laukumi ir *J*, *K*, *L*, *M* (sk. 1.zīm.), tad $J\cdot M = K\cdot L$, jo $J\cdot M = ac\cdot bd = abcd = bc\cdot ad = K\cdot L$.

	a	*b*
c	*J*	*K*
d	*L*	*M*

1.zīm.

Dotajā taisnstūrī nezināmos taisnstūru laukumus apzīmēsim ar *A*, *B*, *C*, *D* un malu garumus ar *p*, *q*, *r*, *x*, *y*, *z*, kā parādīts 2.zīm.

	p	*q*	*r*
x	42	*A*	15
y	7	*B*	*C*
z	*D*	8	5

2.zīm.

No iepriekš pierādītās sakarības varam seko, ka $A\cdot 5 = 8\cdot 15$, tātad $A = 8\cdot 3 = 24$. Līdzīgi
$C\cdot 42 = 7\cdot 15$, no kurienes $C = 2{,}5$;
$D\cdot 15 = 42\cdot 5$, tāpēc $D = 14$;
$B\cdot 42 = 7\cdot A = 7\cdot 24$, tātad $B = 4$.
Tātad pārējo taisnstūru laukumi ir šādi: $A = 24$ cm^2, $B = 4$ cm^2, $C = 2{,}5$ cm^2, $D = 14$ cm^2.

3. Dotās sakarības varam uzrakstīt vienādojumu veidā:

$$a+b=\frac{1}{2}(c+d) \qquad (1)$$

$$a+c=2(b+d) \qquad (2)$$

$$a+d=\frac{3}{2}(b+c) \qquad (3)$$

Redzam, ka uzdevumā ir 4 nezināmi skaitļi, bet no dotajiem nosacījumiem varam izveidot tikai trīs vienādojumus. Tātad, atrisinot šo trīs vienādojumu sistēmu, nevarēsim viennozīmīgi noteikt skaitļu *a*, *b*, *c* un *d* vērtības. Tāpēc jācenšas atrast sakarības starp šiem skaitļiem un novērtēt to summas vērtību.
No vienādojuma (1) varam iegūt sakarību

$$a=-b+\frac{1}{2}(c+d). \qquad (4)$$

Ievietojot šo a izteiksmi vienādojumā (2), iegūstam $-b+\frac{1}{2}c+\frac{1}{2}d+c=2b+2d$, kuru vienkāršojot iegūstam $\frac{3}{2}c-\frac{3}{2}d=3b$. Reizinot iegūtā vienādojuma abas puses ar $\frac{2}{3}$ (jeb dalot ar $\frac{3}{2}$), iegūstam

$$c-d=2b. \qquad (5)$$

Līdzīgi, ievietojot (4) vienādojumā (3), iegūstam $-b+\frac{1}{2}c+\frac{1}{2}d+d=\frac{3}{2}b+\frac{3}{2}c$, tātad

$$-c+\frac{3}{2}d=\frac{5}{2}b. \qquad (6)$$

Saskaitot vienādojumus (5) un (6), iegūstam $\frac{1}{2}d=\frac{9}{2}b$, tātad $d=9b$.

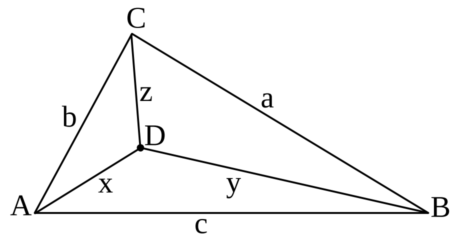
Ja varēsim noteikt summas $b+d$ mazāko vērtību, tad no sakarības (2) atradīsim arī $a+c$ mazāko vērtību, un tad būs viegli noteikt summas $a+b+c+d$ mazāko vērtību.
Tā kā b un d ir naturāli skaitļi, tad to mazākās iespējamās vērtības, lai $d=9b$, ir $b=1$ un $d=9$. Ievietojot šīs vērtības vienādojumā (5), iegūstam $c=11$, bet tad no sakarības (4) varam aprēķināt, ka $a=9$. Pārbaudot iegūtās skaitļu vērtības, ievietojot vienādojumos (1), (2) un (3), secinām, ka tās apmierina uzdevuma nosacījumus. Tātad mazākā summas $a+b+c+d$ vērtība ir 30.

4. Redzam, ka reizinājums $C\cdot C$ ir skaitlis, kas beidzas ar ciparu C. Tas ir iespējams, ja $C=1$, $C=5$ vai $C=6$. Reizinājums ir nepāra skaitlis tad un tikai tad, ja visi reizinātāji ir nepāra skaitļi, tāpēc gan $\overline{AC}$, gan $\overline{CA}$ jābūt nepāra skaitļiem, tātad gan A, gan C ir nepāra cipari. Tātad $C=1$ vai $C=5$ un $C\neq 6$.
Tā kā $\overline{CA}$ arī ir nepāra skaitlis, tad A var būt 1, 3, 5, 7 vai 9. Apskatīsim gadījumu, kad $C=5$. Ja $A=1$, tad $15\cdot 1=15$, bet pēc uzdevumā dotā šim reizinājumam ir jābūt trīsciparu skaitlim. Ja A ir 3, 5, 7 vai 9, tad pirmā reizinātāja reizinājumam ar otrā reizinātāja pirmo ciparu jābūt divciparu skaitlim, bet visi šie reizinājumi (attiecīgi $35\cdot 5$, $55\cdot 5$, $75\cdot 5$ un $95\cdot 5$) ir trīsciparu skaitļi. Tātad vērtība $C=5$ neapmierina uzdevuma nosacījumus; no šejienes seko, ka C var būt tikai 1. Tad iespējamās A vērtības var būt 1, 3, 5, 7 un 9. Ja A ir 1, tad $11\cdot 1=11$ nav trīsciparu skaitlis, tāpēc $A\neq 1$. Ja $A=3$, tad $\overline{AC}\cdot C=31\cdot 3=93$, kas ir divciparu skaitlis, bet $\overline{AC}\cdot C$ ir jābūt trīsciparu skaitlim. Ja $A=7$ vai $A=9$, tad $\overline{AC}\cdot\overline{CA}$ ($71\cdot 17$ vai $91\cdot 19$) – četrciparu skaitlis, bet ir nepieciešams trīsciparu skaitlis. Tātad, vienīgā iespējamā A vērtība ir 5, un uzdevumam ir viens vienīgs atrisinājums (sk. 3.zīm.).

$$\begin{array}{r} 51 \\ \cdot\ 15 \\ \hline 255 \\ 51 \\ \hline 765 \end{array}$$

3.zīm.

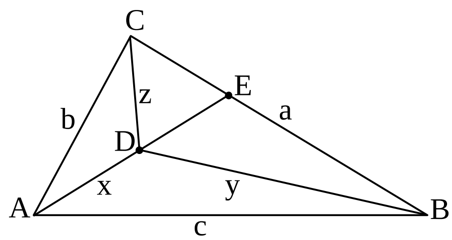
5. Apzīmēsim $AB=c$, $AC=b$, $BC=a$ (sk. 4.zīm.).



4.zīm.

Tad perimetrs $P = a + b + c$. No trijstūra nevienādības seko, ka $a < y + z$, $b < x + z$, $c < x + y$. Saskaitot visas šīs nevienādības, iegūstam $a + b + c < 2x + 2y + 2z$ jeb $P < 2(x + y + z)$. Dalot iegūtās nevienādības abas puses ar 2, iegūstam $\frac{P}{2} < x + y + z$, kas ir pierādāmās nevienādības kreisā puse.

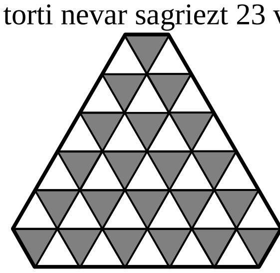
Pierādīsim tagad prasītās nevienādības labo pusi, t.i., ka $x + y + z < P$. Sākumā pierādīsim, ka $x + y < a + b$. Apzīmēsim ar E taisnes AD krustpunktu ar trijstūra malu BC (sk. 5.zīm.).



5.zīm.

Pēc trijstūra nevienādības $x + DE < b + CE$. Pieskaitām nevienādības abām pusēm BE, tad $x + DE + BE < b + CE + BE = a + b$. Tā kā $y < DE + BE$ (trijstūra nevienādība), tad $x + y < a + b$. Līdzīgi varam pierādīt, ka $x + z < a + c$ un $y + z < b + c$. Saskaitot šīs trīs nevienādības, iegūstam $2x + 2y + 2z < 2P$, tātad $x + y + z < P$, k.b.j.

6. Izkrāsosim figūru tā, kā parādīts 6. zīmējumā. Ja torti ir iespējams sagriezt kā prasīts uzdevumā, tad katrs gabaliņš sastāvēs no diviem trijstūriem – viena pelēka un viena balta trijstūra. Tāpēc pelēkajiem un baltajiem trijstūriem ir jābūt vienādā skaitā. Bet ir redzams, ka ir 21 pelēks trijstūris un 25 balti trijstūri. Tātad torti nevar sagriezt 23 vienādos gabalos.


6.zīm.

7. Tā kā abas izteiksmes ir simetriskas, varam pieņemt, ka $b \geq a$ (simetrijas dēļ jāatceras: ja skaitļu pāris $(x; y)$ ir uzdevuma atrisinājums, tad arī $(y; x)$ ir atrisinājums).

Tā kā $\frac{a^2 + b}{b^2 - a}$ jābūt veselam skaitlim, tad $a^2 + b \geq b^2 - a$.

Veicot ekvivalentus pārveidojumus, pakāpeniski iegūstam

$$a + b \geq b^2 - a^2$$
$$a + b \geq (b - a)(b + a)$$

Tā kā a un b ir naturāli skaitļi, tad abas nevienādības puses varam dalīt ar $a+b\geq 0$, iegūstot $1\geq b-a$ jeb $b\leq a+1$.

Tā kā $b\geq a$ un $b\leq a+1$, varam secināt, ka $b=a$ vai $b=a+1$. Apskatīsim katru no šiem gadījumiem.

I. Ja $b=a$. Tad $\dfrac{a^2+b}{b^2-a}=\dfrac{b^2+a}{a^2-b}=\dfrac{a^2+a}{a^2-a}$.

Pārveidojam $\dfrac{a^2+a}{a^2-a}=\dfrac{a^2+a+(-a+a)}{a^2-a}=\dfrac{a^2-a+2a}{a^2-a}=\dfrac{a^2-a}{a^2-a}+\dfrac{2a}{a^2-a}=1+\dfrac{2a}{a^2-a}$. Tā kā a ir naturāls skaitlis, tad $\dfrac{a^2+a}{a^2-a}=1+\dfrac{2a}{a^2-a}>1$. Turklāt no tā, ka $\dfrac{a^2+a}{a^2-a}$ ir vesels skaitlis, seko, ka $\dfrac{a^2+a}{a^2-a}\geq 2$, no kurienes iegūstam $a^2+a\geq 2a^2-2a$ un tālāk $3a\geq a^2$. Dalot nevienādības abas puses ar $a\neq 0$, iegūstam, ka $a\leq 3$. Ievērojam, ka gadījumā, ja $a=1$, izteiksme $\dfrac{a^2+a}{a^2-a}$ nav definēta. Ja $a=2$ vai $a=3$, tad izteiksmes vērtība būs vesels skaitlis. Tātad gadījumā, ja $b=a$, par atrisinājumu der divi skaitļu pāri: (a; b) = (2; 2) un (a; b) = (3; 3).

II. Ja $b=a+1$. Tad $\dfrac{a^2+b}{b^2-a}=\dfrac{a^2+a+1}{a^2+a+1}=1$ vienmēr ir vesels skaitlis. Tātad mums jāapskata otra izteiksme: $\dfrac{b^2+a}{a^2-b}=\dfrac{a^2+3a+1}{a^2-a-1}$. Varam šo izteiksmi pārveidot:

$$\frac{a^2+3a+1-a+a-1+1}{a^2-a-1}=\frac{a^2-a-1+4a+2}{a^2-a-1}=\frac{a^2-a-1}{a^2-a-1}+\frac{4a+2}{a^2-a-1}$$

Lai šīs izteiksmes vērtība būtu vesels skaitlis, $4a+2$ jādalās ar a^2-a-1. Tā kā a^2-a-1 vērtība visiem naturāliem skaitļiem a vienmēr ir nepāra skaitlis (trīs nepāra skaitļu algebriskā summa ir nepāra skaitlis; arī divu pāra skaitļu un viena nepāra skaitļa algebriskā summa ir nepāra skaitlis), bet $4a+2$ visiem naturāliem skaitļiem a ir pāra skaitlis, tad $2a+1$ jādalās ar a^2-a-1. Tātad $a^2-a-1\leq 2a+1$, ko varam pārveidot par $a^2-3a-2\leq 0$.

Pieņemsim, ka $a\geq 4$. Tad $a^2-3a-2=a\cdot a-3a-2\geq 4a-3a-2=a-2\geq 4-2=2>0$. Esam ieguvuši pretrunu, jo $a^2-3a-2\leq 0$. Tātad $a<4$.

Pārbaudām atlikušās a vērtības. Ja $a=3$, tad $b=4$ un otrās izteiksmes vērtība nav vesels skaitlis.

Savukārt gan vērtības $a=2$ un $b=3$, gan $a=1$ un $b=2$ apmierina uzdevuma nosacījumus (otrās izteiksmes vērtības tad ir attiecīgi 11 un -5).

Tātad par uzdevuma atrisinājumu der seši skaitļu pāri: $(2;2)$, $(3;3)$, $(1;2)$, $(2;1)$, $(2;3)$ un $(3;2)$.

8. Ja a, b, c, d un e ir dažādi veseli skaitļi, tad arī reizinātāji $4-a$, $4-b$, $4-c$, $4-d$, $4-e$ ir dažādi veseli skaitļi.

Lai dalījums būtu vesels skaitlis, šiem reizinātājiem ir jābūt skaitļa 12 dalītājiem: -12; -6; -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 6; 12.

Ja viens no reizinātājiem ir -12; -6; -4; 4; 6 vai 12, tad trīs no atlikušajiem ir 1 vai -1; tātad divi no trīs atlikušajiem reizinātājiem ir vienādi, kas ir pretrunā uzdevuma nosacījumiem.

Tātad reizinātāji var būt tikai skaitļi -3; -2; -1; 1; 2 un 3.

Tā kā skaitļu -3 un 3 reizinājums ir -9, bet nav tāda vesela skaitļa, kuru reizinot ar -9 iegūtu 12, tad par reizinātājiem vienlaicīgi nevar būt skaitļi -3 un 3. No tā var secināt, ka pārējie četri reizinātāji noteikti ir -2; -1; 1 un 2. Tad piektais reizinātājs ir vai nu -3, vai 3. Ja tas ir -3, tad visu piecu skaitļu reizinājums ir -12 (pretruna). Tātad piektais reizinātājs ir 3.

Tā kā gan reizināšana, gan saskaitīšana ir komutatīvas operācijas (mainot reizinātāju vai saskaitāmo secību, reizinājums vai summa nemainās), tad nav būtiski, kurš no reizinātājiem $4-a$, $4-b$, $4-c$, $4-d$, $4-e$ ir -2; -1; 1; 2 vai 3.
Tāpēc varam pieņemt, ka $a<b<c<d<e$, no kā seko, ka $4-a>4-b>4-c>4-d>4-e$.
Tagad varam aprēķināt atbilstošās *a*, *b*, *c*, *d* un *e* vērtības:

$4-a=3$, tātad $a=1$;
$4-b=2$, tātad $b=2$;
$4-c=1$, tātad $c=3$;
$4-d=-1$, tātad $d=5$;
$4-e=-2$, tātad $e=6$.

Prasītā skaitļu summa ir $1+2+3+5+6=17$, kas ir vienīgā iespējamā uzdevuma atbilde.

9. Viens atrisinājums ir samainīt vietām šādus monētu pārus: *HK*, *HE*, *HC*, *HA*, *IL*, *IF*, *ID*, *KL*, *GJ*, *JA*, *FK*, *LE*, *DK*, *EF*, *ED*, *EB* un *BK*. Šim uzdevumam ir arī citi atrisinājumi.

10. Sniegbaltīte sastaptajam rūķītim varētu uzdot šādu jautājumu: „Vai Jūs dzīvojat šajā ciematā? ” Pieņemsim, ka rūķītis pateica „Jā”. Ja šis rūķītis ir ciemata *A* iedzīvotājs, tad viņš pateica taisnību un Sniegbaltīte atrodas ciematā *A*. Ja rūķītis ir ciemata *B* iedzīvotājs, tad viņš sameloja un uz Sniegbaltītes jautājumu arī atbildēja „Jā”. Un tas nozīmē, ka Sniegbaltīte atrodas ciematā *A*. Analoģiski var spriest, ja atbilde ir „Nē”. Tikai tad Sniegbaltīte atradīsies ciematā *B*.