„Profesora Cipariņa kluba” 4. nodarbība 2011./2012. mācību gadā
Uzdevumu īsi atrisinājumi.

1. Pārveidojam doto vienādojumu: $a^2 b + 12 = 2012$;

$$a^2 b = 2012 - 12;$$
$$a^2 b = 2000.$$

Atrisinājumu skaits ir vienāds ar skaitļu kvadrātu skaitu, ar kuru skaitlis 2000 dalās bez atlikuma:

$$1^2 \cdot 2000 = 2000;$$
$$2^2 \cdot 500 = 2000;$$
$$4^2 \cdot 125 = 2000;$$
$$5^2 \cdot 80 = 2000;$$
$$10^2 \cdot 20 = 2000;$$
$$20^2 \cdot 5 = 2000.$$

Redzam, ka dotajam vienādojumam ir tieši 6 atrisinājumi.

2. Mazākais nepieciešamais gājienu skaits ir 3. Piemēru, kā ar trim gājieniem kartiņas var sakārtot augošā secībā, skat., 1. zīm.

1. solis: $1\ 5\ 9\ 2\ 7\ \boxed{3\ 6}\ 8\ 4 \longrightarrow 1\ 5\ 9\ 2\ \boxed{3\ 6}\ 7\ 8\ 4$

2. solis: $1\ \boxed{5\ 9}\ 2\ 3\ 6\ 7\ 8\ 4 \longrightarrow 1\ 2\ 3\ 6\ 7\ 8\ 4\ \boxed{5\ 9}$

3. solis: $1\ 2\ 3\ 6\ 7\ 8\ \boxed{4\ 5}\ 9 \longrightarrow 1\ 2\ 3\ \boxed{4\ 5}\ 6\ 7\ 8\ 9$

1.zīm.

Tā kā nepieciešams vismaz pa vienam gājienam gan lai kartiņu ar ciparu 9 novietotu kā pēdējo, gan lai *izšķirtu* kartiņas ar cipariem 5 un 9, gan arī lai kartiņas ar cipariem 2, 7, 3 un 6 sakārtotu pareizā secībā (turklāt ar vienu gājienu nevar izdarīt vienlaicīgi divas no minētajām darbībām), tad nepieciešami vismaz trīs gājieni.

3. a) Skaitļu 59, 82 un 19 ar Pauļa metodi aprēķinātie kvadrāti attēloti 2. zīm.

59^2	82^2	19^2
45	16	09
2581	6404	0181
45	16	09
3481	6724	361

2.zīm.

Īss metodes apraksts:

1) Tabulas otrajā un ceturtajā rindā ieraksta dotā skaitļa abu ciparu reizinājumu (ja reizinājums ir viencipara skaitlis, tad pirmā cipara vietā raksta 0). Iegūtā reizinājuma pirmais cipars jāraksta sākot no rezultāta simtu šķiras (t.i., tieši zem dotā skaitļa).
2) Trešajā rindā jāraksta četrciparu skaitlis, kura pirmie divi cipari ir dotā skaitļa pirmā cipara kvadrāts, bet otrie divi cipari ir dotā skaitļa otrā cipara kvadrāts (ja kāds no kvadrātiem ir viencipara skaitlis, tad pirmā cipara vietā raksta 0). Šī četrciparu skaitļa pirmais cipars jāraksta sākot no rezultāta tūkstošu šķiras (t.i., divi vidējie cipari jāraksta tieši zem dotā skaitļa).
3) Jāsaskaita iegūtie trīs skaitļi pa vertikālēm. Aprēķinātā summa ir dotā skaitļa kvadrāts.

b) Lai metodes pierādījums būtu uzskatāmāks, pierakstīsim uzdevuma formulējumā dotajā piemērā pirmajam un trešajam saskaitāmajam labajā pusē katram vienu nulli (tātad skaitli 42, kas ir skaitļu 6 un 7 reizinājums, pareizinām ar 10; skat. 3.zīm.). Viegli saprast, ka, veicot saskaitīšanu stabiņā, šī nulle rezultātu neietekmē.

$$\begin{array}{r} 67^2 \\ \hline 420 \\ 3649 \\ 420 \\ \hline 4489 \end{array}$$

3.zīm.

Pierādīsim, ka šī metode ir korekta, lai aprēķinātu jebkura naturāla divciparu skaitļa kvadrātu.

Jebkuru divciparu skaitli $x = \overline{ab}$ (pieraksts $\overline{ab}$ nozīmē, ka a ir šī skaitļa desmitu cipars, b – skaitļa vienu cipars) var pierakstīt kā summu $x = 10a + b$.

Skaitļa x kvadrātu tad varam uzrakstīt:

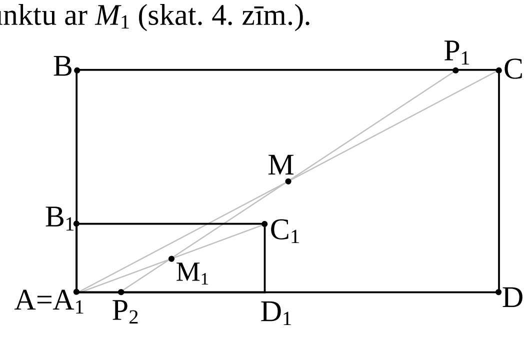
$$x^2 = (10a+b)^2 =$$
$$= 100a^2 + 20ab + b^2 =$$
$$= 10ab + \left(100a^2 + b^2\right) + 10ab$$

Apskatīsim pirmo un trešo saskaitāmo. Redzam, ka tas izsaka skaitļa x abu ciparu un skaitļa 10 reizinājumu. Tā kā divu viencipara skaitļu reizinājums satur ne vairāk kā divus ciparus, tad šī reizinājuma reizinājums ar 10 saturēs ne vairāk kā 3 ciparus, turklāt pēdējais cipars būs 0, kuru Paulis neraksta.

Apskatīsim vidējo saskaitāmo. Tas sastāv no diviem saskaitāmajiem: $100a^2$ un b^2. Tā kā gan a, gan b ir viencipara skaitļi, tad to kvadrāti satur katrs ne vairāk kā 2 ciparus. Skaitļa a^2 reizinājums ar 100 ir vai nu četrciparu skaitlis (ja a^2 ir divciparu), vai arī trīsciparu skaitlis (ja a^2 ir viencipara), turklāt pēdēji divi šī skaitļa cipari ir nulles. Tātad pieskaitot tam skaitli b^2 (kurš, kā jau iepriekš nospriedām, satur ne vairāk kā divus ciparus), iegūtās summas $100a^2 + b^2$ pirmie divi cipari veidos skaitli a^2, bet pēdējie divi – skaitli b^2 (ja b^2 ir viencipara skaitlis, tad tas tiek pierakstīts kā divciparu skaitlis, kura pirmais cipars ir 0), kas atbilst Pauļa metodes vidējam saskaitāmajam.

Tātad esam pierādījuši, ka Pauļa atrastā metode ir korekta, aprēķinot jebkura naturāla divciparu skaitļa kvadrātu.

4. Apzīmējam taisnstūra $ABCD$ diagonāles AC viduspunktu ar M, bet taisnstūra $A_1B_1C_1D_1$ diagonāles A_1C_1 viduspunktu ar M_1 (skat. 4. zīm.).



4.zīm.

Sākumā pierādīsim, ka taisne MM_1 krusto taisnstūrī $ABCD$ vai nu malas AD un BC, vai arī malas AB un CD (acīmredzams, ka MM_1 jākrusto vismaz viena taisnstūra mala) vai arī sakrīt ar AC, ja $C_1 \in AC$.

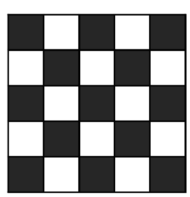
Pieņemsim, ka MM_1 krusto malu BC. Apzīmēsim šo krustpunktu ar P_1. Apskatīsim punktu P_2, kas ir centrāli simetrisks punktam P_1 ar simetrijas centru punktā M. Punkts M ir gan diagonāles AC viduspunkts, gan arī taisnstūra simetrijas centrs – katrs taisnstūra punkts attēlojas caur M par kādu citu atbilstošu taisnstūra punktu. Tādējādi mala BC attēlojas par malu AD. Arī taisne MM_1 ir simetriska pret punktu M, attēlojoties pati par sevi. Tātad, tā kā punkts P_1 pieder taisnei MM_1

un atrodas uz taisnstūra *ABCD* malas *BC*, tad simetriskais punkts P_2 arī pieder taisnei MM_1 un atrodas uz taisnstūra pretējās malas *AD*. Tātad MM_1 krusto arī malu *AD*.
Līdzīgi arī gadījumos, kad pieņemam, ka MM_1 krusto kādu no malām *AB*, *AD* vai *CD*, izmantojot simetriju pret punktu *M*, mēs iegūtu, ka MM_1 krusto arī attiecīgi malu *CD*, *BC* vai *AB*.
Tālāk varam pieņemt, ka MM_1 krusto malas *BC* un *AD*. Otrs gadījums (MM_1 krusto malas *AB* un *CD*) simetrijas dēļ var tikt apskatīts analoģiski.
Taisnes MM_1 krustpunktu ar malu *BC* apzīmējam ar P_1, bet krustpunktu ar malu *AD* – ar P_2.
Diagonāle *AC* sadala taisnstūri *ABCD* divos vienlielos trijstūros *ABC* un *CDA*, kuru laukums ir $S_{\Delta ABC}=S_{\Delta CDA}=\frac{1}{2}\cdot S_{ABCD}$.
Ja $P_1=C$ un $P_2=A$, tad diagonāle *AC* atrodas uz taisnes MM_1, tātad MM_1 sadala taisnstūri *ABCD* divos vienlielos trijstūros.
Tāpēc apskatīsim vispārīgāku gadījumu: punkts P_1 nesakrīt ar *C* un punkts P_2 nesakrīt ar *A*.
Pierādīsim, ka arī tad taisne MM_1 gan abus taisnstūrus, gan sešstūri sadala divās vienlielās daļās.

1. pierādījums.
Jebkurš taisnstūris ir centrāli simetriska figūra attiecībā pret tā diagonāļu krustpunktu (tas ir arī diagonāļu viduspunkts) *M*. Tā kā P_1 un P_2 atrodas uz taisnes, kas vilkta caur simetrijas centru *M*, un punkti pieder attiecīgi *BC* un *AD*, tad tie arī ir novietoti simetriski pret punktu *M*. Tātad arī četrstūri ABP_1P_2 un P_2P_1CD ir simetriski pret punktu *M*, tāpēc to laukumi ir vienādi. Tātad MM_1 sadala taisnstūri *ABCD* divās vienlielās daļās.
Analoģiski pierāda, ka MM_1 sadala taisnstūri $A_1B_1C_1D_1$divās vienlielās daļās.
Tā kā sešstūra $B_1BCDD_1C_1$ laukums ir abu taisnstūru laukumu starpība, arī tas ar taisni MM_1 ir sadalīts divās vienlielās daļās.

2. pierādījums.
Diagonāle *AC* sadala taisnstūri *ABCD* divās vienlielās daļās.
Tā kā $BC\parallel AD$, tad $\angle MAP_2=\angle MCP_1$ (iekšējie šķērsleņķi); savukārt $\angle P_2MA=\angle CMP_1$ kā krustleņķi. Tā kā *M* ir *AC* viduspunkts, tad $AM=MC$. Tātad $\Delta AMP_2=\Delta MP_1C$ ($\ell m\ell$). Tātad MM_1 sadala taisnstūri *ABCD* divās vienlielās daļās. Līdzīgi pierāda, ka MM_1 sadala divās vienlielās daļās arī taisnstūri $A_1B_1C_1D_1$.
Tā kā sešstūris $B_1BCDD_1C_1$ ir abu taisnstūru laukumu starpība, kuri ar taisni MM_1 ir sadalīti divās vienlielās daļās, tad arī šis sešstūris ar taisni MM_1 ir sadalīts divās vienlielās daļās.

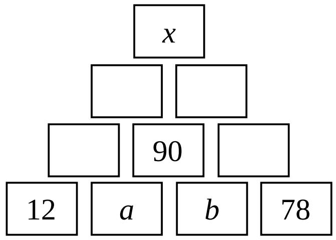
5. Atbilde: nē, tā nevar gadīties.
Pierādījums. Izkrāsosim kvadrātu šaha galdiņa veidā (skat. 5.zīm.), kreiso augšējo stūra rūtiņu iekrāsojot melnu. Redzam, ka kvadrātā ir 13 melnas un 12 baltas rūtiņas.



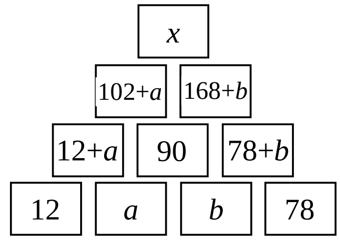
5.zīm.

Apskatīsim visas tās figūriņas, kas sākumā atradās uz melnajām rūtiņām – tādu kopskaitā ir 13. Rūtiņas, kas atrodas blakus melnajām rūtiņām, ir baltās rūtiņas. Tātad pēc pārvietošanas figūriņām no melnajām rūtiņām jāatrodas baltajās rūtiņās. Tā kā figūriņu, kas jāpārvieto, ir 13, bet balto rūtiņu, uz kurām tās var likt, ir tikai 12, tad to nevar izdarīt.

6. Atbilde: $x=360$.
1. risinājums. Apakšējā rindā tukšajās rūtiņās ierakstītos skaitļus apzīmējam ar *a* un *b* (skat. 7. zīm.). Tad varam ievērot, ka $a+b=90$.



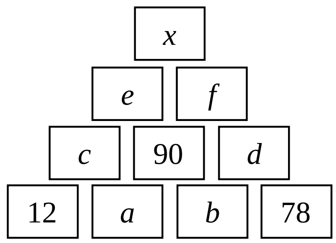
7.zīm.



8.zīm.

Atbilstoši uzdevuma nosacījumiem, aizpildām pārējās *piramīdas* rūtiņas (skat. 8. zīm.). Iegūstam, ka $x = 102 + a + 168 + b = 270 + (a + b) = 270 + 90 = 360$.

2. risinājums. Apzīmējam tukšajās rūtiņās ierakstāmos skaitļus ar *a*, *b*, *c*, *d*, *e* un *f*, kā parādīts 9. zīm.



9.zīm.

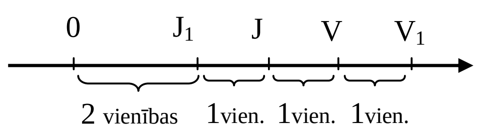
Atbilstoši uzdevuma nosacījumiem $a + b = 90$, tad $b = 90 - a$. Savukārt $d = b + 78 = (90 - a) + 78 = 168 - a$. Un tālāk $f = 90 + d = 90 + (168 - a) = 258 - a$.

Līdzīgi apskatīsim arī piramīdas kreiso pusi. Redzam, ka $c = 12 + a$. Bet $e = c + 90 = (12 + a) + 90 = 102 + a$.

Tā kā $x = e + f$, tad, ievietojot iegūtās izteiksmes skaitļiem *e* un *f*, iegūstam, ka $x = e + f = (102 + a) + (258 - a) = 360$.

7. Sniegsim divus uzdevuma risināšanas variantus – gan ar vienādojumu sistēmas palīdzību, gan arī interpretējot uzdevuma nosacījumus uz skaitļu ass.

1. risinājums. Uzdevumu atrisināsim grafiski ar skaitļu ass palīdzību (skat. 10. zīm.).



10. zīm.

Nogrieznis OJ ir jaunākā vīra vecums un nogrieznis OV vecākā vīra vecums. Nogrieznis JV izsaka abu vīru vecuma starpību un to pieņem kā vienu vienību.

Pirmais nosacījums: Kad vecākā vīra vecums bija vienāds ar jaunākā vīra vecumu (nogrieznis OJ), tad jaunākā vīra vecums bija izsakāms ar nogriezni OJ_1. Tā kā divu cilvēku vecumu starpība ir nemainīgs lielums, tad $J_1J = JV = 1$ vienība. Tā kā vecākā vīra vecums ir divreiz lielāks nekā jaunākā vīra vecums iepriekš, tad nogrieznis OV ir divreiz garāks par nogriezni OJ_1. Tātad, $OJ_1 = J_1V = 2$ vienības.

Otrais nosacījums: Kad jaunākā vīra vecums būs vienāds ar vecākā vīra tagadējo vecumu tagad (nogrieznis OV), tad vecākā vīra vecums būs nogrieznis OV_1 un abu vīru vecumu starpība būs nogrieznis VV_1, kas ir 1 vienību garš.

Tātad, vecākā vīra vecums būs nogrieznis OV_1, kas ir 5 vienības garš, bet jaunākā vīra vecums būs nogrieznis OV, kas ir 4 vienības garš. Pēc dotā abu vīru kopējais vecums būs 63 gadi, kam atbilst 9 vienības uz ass. Varam aprēķināt, ka vienai vienībai atbilst $63:9=7$ gadi.
Tātad jaunākajam vīram ir $3\cdot 7=21$ gads un vecākajam vīram ir $4\cdot 7=28$ gadi.

2. risinājums. Apzīmēsim vecākā vīra vecumu gados ar *x*, bet jaunākā vīra vecumu gados – ar *y*. Tad vecākais vīrs šobrīd ir par $x-y$ gadiem vecāks nekā jaunākais vīrs.
Pirmo apgalvojumu – *man tagad ir divreiz vairāk gadu, nekā jums bija tad, kad man bija tikpat gadu, cik jums ir tagad* – varam pierakstīt ar vienādību $\frac{x}{2}=y-(x-y)$, jo vecākajam vīram tikpat gadu, cik jaunākajam ir tagad, bija pirms tik gadiem, par cik viņš tagad ir vecāks nekā jaunākais vīrs.
Otro apgalvojumu – *kad jums būs tikpat gadu, cik man ir tagad, tad mums kopā būs 63 gadu* – varam pierakstīt ar vienādību $(y+(x-y))+(x+(x-y))=63$, jo jaunākajam būs tikpat gadu, cik pašlaik ir vecākajam, pēc tik gadiem, kāda šobrīd ir abu vīriešu gadu skaitu starpība.

Esam ieguvuši vienādojumu sistēmu $\begin{cases}\frac{x}{2}=y-(x-y)\\ x+(x+(x-y))=63\end{cases}$.

Veicam ekvivalentus pārveidojumus:

$$\begin{cases}x=4y-2x\\ x+2x-y=63\end{cases},$$

$$\begin{cases}3x=4y\\ 3x-y=63\end{cases}.$$

Otrajā vienādojumā ievietojot pirmajā vienādojumā iegūto sakarību, iegūstam, ka $4y-y=63$, no kurienes $3y=63$ un $y=21$. Tad no pirmā vienādojuma $x=\frac{4}{3}y=\frac{4\cdot 21}{3}=28$. Tātad vecākā vīra vecums ir 28 gadi, bet jaunākā – 21 gadi.

8. Attēlosim skolotāju atbildes tabulā:

	1. vieta	*2. vieta*	*3. vieta*	*4. vieta*	*5. vieta*	*6. vieta*	*7. vieta*
Sk. Bērziņš	Emma	Dainis	Anna	Fredis	Gatis	Centis	Baiba
Sk. Kārkliņš	Centis	Emma	Baiba	Fredis	Gatis	Dainis	Anna

Tā kā abi skolotāji kopā ir pareizi nosaukuši deviņas vietas, tad noteikti divas no vietām abi ir nosaukuši pareizi vienlaicīgi. Šādas divas vietas, kurām abi skolotāji ir nosaukuši vienus un tos pašus bērnus, ir 4. un 5. vieta, kuras ieņēmuši attiecīgi Fredis un Gatis.
Tātad skolotājs Bērziņš pareizi ir atminējis vēl divas vietas, bet skolotājs Kārkliņš – vēl trīs vietas. Iegūstam, ka kopā skolotāji pareizi atminējuši vēl 5 vietas, kas atbilst arī vēl nenoskaidrotajām pareizajām vietām. Tas nozīmē, ka katrā no nenoskaidrotajām vietām kāds no diviem skolotāju minētajiem skolēniem ir pareizs.
Pieņemsim, ka skolotājs Bērziņš ir pareizi atminējis, ka 1. vietu ieguva Emma, bet šajā gadījumā viņš pareizi uzminējis, ka 2. vietu ieguvis Dainis (jo Emma to nav ieguvusi, tātad ieguvis ir otra skolotāja minētais skolēns), savukārt tad 6. vietu ieguvis Centis. Bet tad skolotājs Bērziņš pareizi atminējis vēl trīs vietas, tātad kopā pavisam piecas, kas ir pretrunā ar uzdevuma nosacījumiem.
Tātad skolotājs Bērziņš kļūdījās par 1. vietas ieguvēju, kas nozīmē, ka skolotājam Kārkliņam bija taisnība – 1. vietu ieguva Centis; tad 6. vietu ieguva Dainis un 2. vietu – Emma. Tā kā

skolotājs Kārkliņš vairāk pareizu atbilžu nepateica, tad par 3. vietas un 7. vietas ieguvēju viņš kļūdījās (un tātad pareizi uzminēja skolotājs Bērziņš), un tās ieguva attiecīgi Anna un Baiba.
Esam ieguvuši, ka skolēni finišēja šādā secībā:

1. vieta	*2. vieta*	*3. vieta*	*4. vieta*	*5. vieta*	*6. vieta*	*7. vieta*
Centis	Emma	Anna	Fredis	Gatis	Dainis	Baiba

9. Atbilde: Nē, šāds daudzskaldnis neeksistē.
Risinājums. Pieņemsim, ka šāds daudzskaldnis eksistē. Deviņiem trijstūriem kopā ir 27 malas. Tā kā daudzskaldnī *blakus esošām* skaldnēm ir kopīga šķautne, tad daudzskaldņa kopējais šķautņu skaits ir divas reizes mazāks nekā kopējais skaldņu veidojošo daudzstūru malu skaits. Bet 27 nedalās ar 2. Tātad šādu daudzskaldni izveidot nav iespējams.

10. Ja šie abi izveidotie apgalvojumi ir par vienu un to pašu objektu, tad skaidrs, ka tie abi nevar būt patiesi. Tātad apgalvojumi jāizvēlas tā, lai tie runātu par dažādiem objektiem.
Par uzdevumā prasītajiem apgalvojumiem der, piemēram, šādi divi teikumi:

„Taisnība, ka šajā teikumā ir septiņi vārdi.”
„Nav taisnība, ka šajā teikumā ir septiņi vārdi.”

Skaidrs, ka tie abi ir patiesi, turklāt katrs no tiem ir par citu objektu.
Piezīme. Šādi (un līdzīgi) apgalvojumi „Jānis ir labs skolnieks” un „Nav taisnība, ka Jānis ir labs skolnieks” nav uzskatāmi par korektu uzdevuma atrisinājumu. Nav pareizi spriest, ka šajos apgalvojumos nav zināms, par kādu Jāni ir runa, un tāpēc, ja runā par vienu Jāni, pareizs ir pirmais apgalvojums, bet, ja runā par otru Jāni – otrais. Kļūda ir tieši tā, ka, kamēr nav noteikts, par kādu Jāni tiek runāts, ne par vienu no šiem apgalvojumiem vispār nevar pateikt ne to, ka tas ir aplams, ne to, ka tas ir pareizs – abi apgalvojumi ir nenoteikti. Bet, tikko izvēlēts kāds noteikts Jānis, viens no apgalvojumiem būs patiess, otrs – aplams.