„Profesora Cipariņa kluba” 5. nodarbība 2011./2012. mācību gadā
Uzdevumu īsi atrisinājumi.

1. Pie katras no 12 kuba šķautnēm veidojas 8 kubi ar izmēriem 1×1 cm, kuriem ir tieši divas nokrāsotas skaldnes. Kopā ir $8\cdot12=\mathbf{96}$ šādi kubi. Katras skaldnes iekšējais kvadrāts ar izmēriem 8×8 cm veidojas no 64 kubiem, kuriem ir tieši viena nokrāsota skaldne. Tātad, kopā ir $64\cdot6=\mathbf{384}$ kubi, kuram ir tieši viena nokrāsota skaldne.

2. Ievērosim, ja kāds skaitlis dalās ar 3, tad arī skaitlis, kas no tā iegūstams ar šajā uzdevumā pieļaujamajām operācijām, dalās ar 3. Attiecībā uz pirmo operāciju tas ir acīmredzams. Pierādīsim šo apgalvojumu pārējām divām operācijām:

b) Ja pāra skaitlis $2n$ dalās ar 3, tad vai nu 2, vai n dalās ar 3. Bet 2 ar 3 nedalās, tātad n dalās ar 3.

c) Trešajai operācijai apgalvojums izriet no dalāmības pazīmes ar 3. Ja dotā skaitļa ciparu summa dalās ar 3, tad jauniegūtā skaitļa ciparu summa, kas ir divreiz lielāka nekā sākotnējā skaitļa ciparu summa, arī dalās ar 3; tātad arī pats jauniegūtais skaitlis dalās ar 3.

Tā kā uzdevumā dotais skaitlis 24 dalās ar 3, tad arī skaitļiem, kurus var iegūt no 24, jādalās ar 3. Bet 2012 ar 3 nedalās. Tātad skaitli 2012 nevar iegūt.

3. Līdzīgi kā risinot Profesora Cipariņa kluba 3.kārtas 2.uzdevumu, izmantosim šādu sakarību:

- Ja taisnstūris ir sadalīts četros taisnstūros, kuru laukumi ir J, K, L, M (sk. 1.zīm.), tad $\boldsymbol{J\cdot M=K\cdot L}$, jo $J\cdot M=ac\cdot bd=abcd=bc\cdot ad=K\cdot L$.

	a	b
c	J	K
d	L	M

1.zīm.

Nezināmos taisnstūru laukumus apzīmēsim ar A, B, C, D un E (skat. 2. zīm.).

A	10	20
B	2	C
3	D	E

2. zīm.

Izmantojot augšminēto sakarību, viegli aprēķināt taisnstūra C laukumu:

$$10\cdot C=2\cdot20$$
$$10C=40$$
$$C=4\ cm^2$$

No zīmējuma ir redzams, ka $A=5B$, $E=2D$ un $BD=2\cdot3$.
Zināms, ka B un D ir veseli skaitļi, tātad to reizinājums var būt 6 tikai pie šādām B un D vērtībām:

$B=1,\ D=6$ vai $B=2,\ D=3$, vai $B=3,\ D=2$, vai $B=6,\ D=1$.

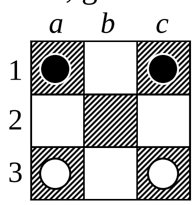
Apskatīsim katru gadījumu atsevišķi:

- Ja $B=1,\ D=6$, tad $A=5$ un $E=12$. Tad taisnstūra laukums ir $5+10+20+1+2+4+3+6+12=63\ cm^2$, kas apmierina uzdevuma nosacījumus.

- Ja $B = 2,\ D = 3$, tad $A = 10$ un $E = 6$. Tad taisnstūra laukums ir $10 + 10 + 20 + 2 + 2 + 4 + 3 + 3 + 6 = 60 \neq 63\ cm^2$. Tātad šis gadījums neder.
- Ja $B = 3,\ D = 2$, tad $A = 15$ un $E = 4$. Tad taisnstūra laukums ir $15 + 10 + 20 + 3 + 2 + 4 + 3 + 2 + 4 = 63\ cm^2$, kas apmierina uzdevuma nosacījumus.
- Ja $B = 6,\ D = 1$, tad $A = 30$ un $E = 2$. Tad taisnstūra laukums ir $30 + 10 + 20 + 6 + 2 + 4 + 3 + 1 + 2 = 78 \neq 63\ cm^2$, kas neatbilst uzdevuma nosacījumiem.

Tātad šim uzdevumam ir divi atrisinājumi: $A = 5$, $B = 1$, $C = 4$, $D = 6$, $E = 12$ cm^2 vai $A = 15$, $B = 3$, $C = 4$, $D = 2$, $E = 4$ cm^2.

4. Gar vienu šaha galdiņa malu uzrakstam burtus, gar otru – ciparus (skat. 3. zīm.).



3.zīm.

Sāksim gājienu ar melno šaha zirdziņu, kas atrodas augšējā rindā, labajā stūrī (lauciņš *c*1). No šī lauciņa zirdziņu pārvietosim uz lauciņu *b*3 un turpmāk to pierakstīsim šādi: *c*1 – *b*3.
Lai samainītu vietām melnos un baltos šaha zirdziņus, secīgi jāizdara šādi gājieni:

*a*3 – *b*1, *a*1 – *c*2, *c*1 – *b*3, *c*3 – *a*2, *b*3 – *a*1,
*b*1 – *c*3, *c*2 – *a*3, *a*2 – *c*1, *a*1 – *c*2, *c*3 – *a*2,
*a*3 – *b*1, *c*1 – *b*3, *c*2 – *a*3, *a*2 – *c*1, *b*1 – *c*3, *b*3 – *a*1.

5. Pieņemsim, ka mums doti *A* santīmi *B* monētās, turklāt 1 sant. monētu skaits ir x_1, 2 sant. monētu skaits ir x_2, 5 sant. monētu skaits ir x_3, 10 sant. monētu skaits ir x_4, 20 sant. monētu skaits ir x_5, 50 sant. monētu skaits ir x_6, bet 1 lata monētu skaits ir x_7. Iegūstam kopējo naudas daudzumu santīmos *A* varam izteikt $A = x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 10x_4 + 20x_5 + 50x_6 + 100x_7$. Ar *B* apzīmējot kopējo monētu skaitu, iegūstam $B = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7$.
Tagad ņemsim nākamo monētu komplektu: 1 sant. monētas $100x_7$, 2 sant. monētas $50x_6$, 5 sant. monētas $20x_5$, 10 sant. monētas $10x_4$, 20 sant. monētas $5x_3$, 50 sant. monētas $2x_2$, 1 lata monētas x_1. Redzam, ka kopējais naudas daudzums ir

$$100x_1 + 50x_2 \cdot 2 + 20x_3 \cdot 5 + 10x_4 \cdot 10 + 5x_5 \cdot 20 + 2x_6 \cdot 50 + x_7 \cdot 100 =$$
$$= 100(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7) = 100B \text{ santīmi jeb } B \text{ lati.}$$

Viegli ievērot, ka kopējais monētu skaits ir vienāds ar *A*. Tātad uzdevumā prasītais ir pierādīts.

6. Tā kā sešu vienādu pēdējo ciparu summa, t.i., $6 \cdot S$ beidzas ar ciparu 4, tad *S* var būt vai nu 4, vai 9. Ja *S* būtu 4, tad $6 \cdot 4 = 24$, tātad veidojas *pārnesums* 2 nākamajai summai. Bet piecu vienādu ciparu *G* summa kopā ar pieskaitīto *pārnesumu* (t.i., $5 \cdot G + 2$) nevar beigties ar ciparu 5. Tātad ***S* = 9**.

„Profesora Cipariņa kluba” 5. nodarbība 2011./2012. mācību gadā
Uzdevumu īsi atrisinājumi.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & {}^{5} & 9\\
 & & & & {}^{x} & G & 9\\
 & & & {}^{y} & E & G & 9\\
 & & {}^{z} & I & E & G & 9\\
 & & N & I & E & G & 9\\
+ & 9 & N & I & E & G & 9\\
\hline
 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4
\end{array}$$

4.zīm.

Ar x, y, z apzīmēsim pārnesumus, kas rodas no iepriekšējās šķiras (skat. 4. zīm.). Lielākā iespējamā x vērtība ir 4 (gadījumā, ja G ir 7 vai 8); lielākā y vērtība ir 3 (ja E ir 7 vai 8); lielākā iespējamā z vērtība ir 2 (ja $I \geq 6$ un $y \geq 2$).

Tagad apskatīsim, kādas ir iespējamās N vērtības. Tā kā $S = 9$ un summas pirmais cipars arī ir 9, tad saskaitot $N + N + z$ pārnesumi nerodas (t.i., summa ir viencipara skaitlis). Turklāt no tā, ka $z \leq 2$, secinām, ka N ir vai nu 3, vai 4.

Pieņemsim, ka $N = 3$. Tad no vienādojuma $z + N + N = 8$ iegūstam, ka $z = 2$, t.i., I ir 6, 7 vai 8 (atceramies, ka 9 ir jau izmantots). Tā kā $y \leq 3$, tad summas $I + I + I$ pēdējam ciparam jābūt 4, 5, 6 vai 7. Vienīgā no minētājām I vērtībām, kura apmierina šo nosacījumu, ir 8.

Tādā gadījumā $y = 3$. Tas iespējams tikai tad, ja E ir 7 (gan 8, gan 9 jau izmantojām), bet tā kā skaitlis $E \cdot 4 = 7 \cdot 4$ beidzas ar 8, bet summai $x + E + E + E + E$ jābeidzas ar ciparu 6 un $x \leq 4$, tad tas nav iespējams. Esam ieguvuši, ka $N \neq 3$.

Atliek tikai, ka $N = 4$ un $z = 0$. Tad $I = 2$ (I nevar būt 1, jo tad y jābūt 4, bet zināms, ka $y \leq 3$; I nevar būt arī 3 vai lielāks skaitlis, jo tad noteikti veidosies pārnesums) un $y = 1$ (skat. 4. zīm.).

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & {}^{5} & 9\\
 & & & & {}^{x} & G & 9\\
 & & & {}^{y=1} & E & G & 9\\
 & & {}^{z=0} & 2 & E & G & 9\\
 & & 4 & 2 & E & G & 9\\
+ & 9 & 4 & 2 & E & G & 9\\
\hline
 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4
\end{array}$$

4.zīm.

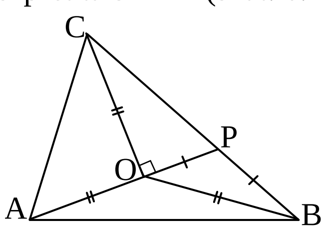
Tā kā $y = 1$ un skaitļi 2 un 4 jau ir izmantoti, tad atliek, ka $E = 3$; tad $x = 4$. Tātad G ir vismaz 7. Tomēr, tā kā summas $G + G + G + G + G + 5$ pēdējam ciparam jābūt 5, tad skaidrs, ka G jābūt pāra skaitlim, tātad $G = 8$.

Esam ieguvuši, ka uzdevumam ir tieši viena atbilde (skat. 5. zīm.).

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & 9\\
 & & & & & 8 & 9\\
 & & & & 3 & 8 & 9\\
 & & & 2 & 3 & 8 & 9\\
 & & 4 & 2 & 3 & 8 & 9\\
+ & 9 & 4 & 2 & 3 & 8 & 9\\
\hline
 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4
\end{array}$$

5.zīm.

7. Konstruēsim perpendikulu CO pret taisni AP (skat. 6. zīm.).



6.zīm.

Tā kā ΔCOP ir taisnleņķa trijstūris ar šauro leņķi $\angle CPO = 60°$ (tātad $\angle OCP = 90° - 60° = 30°$), tad tā katetes OP garums ir vienāds ar pusi no hipotenūzas CP garuma.

Tā kā gan $OP = \frac{1}{2}CP$, gan pēc dotā arī $PB = \frac{1}{2}CP$, tad $OP = PB$. Tāpēc trijstūris OPB ir vienādsānu trijstūris.

Tad $\angle OPB = 180° - \angle OPC = 180° - 60° = 120°$ un $\angle POB = \angle PBO = \frac{180° - 120°}{2} = 30°$.

Savukārt $\angle OBA = \angle CBA - \angle PBO = 45° - 30° = 15°$ un
$\angle AOB = 360° - \angle COP - \angle COA - \angle POB = 360° - 90° - 90° - 30° = 150°$

Tad $\angle OAB = 180° - \angle AOB - \angle OBA = 180° - 150° - 15° = 15°$. Tā kā $\angle OAB = \angle OBA$ un trijstūrī pret vienādiem leņķiem atrodas vienādas malas, tad $OB = OA$ un trijstūris AOB ir vienādsānu.

Tagad apskatīsim trijstūri BOC. Tā $\angle OCB = \angle OCP = 30°$. Tā kā $\angle OCB = \angle PBO$, tad trijstūris BOC arī ir vienādsānu un $OC = OB$.

Tā kā $OC = OB$ un $OB = OA$, tad arī $OA = OC$ un trijstūris AOC ir vienādsānu taisnleņķa trijstūris. Tāpēc $\angle ACO = 45°$.

Vajadzīgais leņķis $\angle ACB = \angle ACO + \angle OCP = 45° + 30° = 75°$.

8. Zāles daudzumu, ko 1 govs apēd 1 dienā, nosauksim par 1 vienību.

Aprēķināsim, cik vienību zāles apēd 70 govis 24 dienās: $24 \cdot 70 = 1680$ zāles vienības. Šajās 1680 vienībās ietilpst zāle, kas jau bija izaugusi, pirms govis bija izlaistas pļavā, un zāle, kas izauga 24 dienās.

Savukārt 30 govis 60 dienās apēd: $30 \cdot 60 = 1800$ zāles vienības.

Tā kā abos gadījumos tika apēsta visa zāle, tad varam aprēķināt, cik daudz zāles izaug 60 – 24 = 36 dienās: 1800 – 1680 = 120 vienības. Tad 24 dienās izaug 80 vienības zāles, un sākotnējais zāles daudzums pļavā ir $1680 - 80 = 1600$ vienības.

Prasītajās 96 dienās sākotnējam zāles daudzumam pļavā klāt izaugs $80 \cdot 4 = 320$ vienības zāles, tādējādi kopējais zāles apjoms, ko govis ēdīs 96 dienas, būs 1600 + 320 = 1920 vienības. Katrā no šīm 96 dienām tiks apēstas $1920 : 96 = 20$ zāles vienības, tātad būs nepieciešamas 20 govis.

9. Ievērosim, ka pirmajā virknītē ir divi cipari, otrajā – $2 \cdot 2 = 4$ cipari, trešajā – $2 \cdot 4 = 8$, ceturtajā – $2 \cdot 8 = 16$, piektajā – $2 \cdot 16 = 32$, sestajā – $2 \cdot 32 = 64$, septītajā – $2 \cdot 64 = 128$, astotajā – $2 \cdot 128 = 256$, devītajā – $2 \cdot 256 = 512$, desmitajā – $2 \cdot 512 = 1024$, vienpadsmitajā – $2 \cdot 1024 = 2048$ cipari. Tātad, vienpadsmitā virknīte ir pirmā, kurā ir vismaz 2012 cipari.

Noskaidrosim, kāds ir šīs virknītes 2012-ais cipars: 0 vai 1? Apzīmēsim to ar *s*.

Teiksim, ka ciparam 0 inversais cipars ir 1, bet ciparam 1 inversais cipars ir 0. Ciparam *x* inverso ciparu apzīmēsim ar x^*. Acīmredzot, $(x^*)^* = x$. Tiešām, $(0^*)^* = 1^* = 0$ un $(1^*)^* = 0^* = 1$.

Katram $n = 1; 2; 3; \ldots; 10; 11$ apskatāmo virknīti apzīmēsim ar α_n, bet tās „otrādo kopiju” ar $\hat{\alpha}_n$. Virknīšu α_n un $\hat{\alpha}_n$ k-tos ciparus apzīmēsim attiecīgi ar $\alpha_n(k)$ un $\hat{\alpha}_n(k)$.

Pēc uzdevuma nosacījumiem, katram *n*

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n \hat{\alpha}_n .$$

Pie $n = 10$ iegūstam šādu virknīti:

$$\alpha_{11} = \underbrace{\alpha_{10}}_{1024\,cipari} \quad \underbrace{\hat{\alpha}_{10}}_{1024\,cipari} .$$

Redzam, ka meklējamais cipars *s* (virknes α_{11} 2012-ais cipars) ir virknes $\hat{\alpha}_{10}$ $2012 - 1024 = 988$-ais cipars. Citiem vārdiem,

$$s = \alpha_{11}(2012) = \hat{\alpha}_{10}(988) = \alpha^*{}_{10}(988).$$

Tā kā $s = \alpha^*{}_{10}(988)$, tad $s^* = \alpha_{10}(988)$.

Pie $n=9$ iegūstam

$$\alpha_{10} = \underbrace{\alpha_9}_{512\,cipari}\ \underbrace{\hat{\alpha}_9}_{512\,cipari}.$$

Tāpēc $s^* = \alpha_{10}(988) = \hat{\alpha}_9(988-512) = \hat{\alpha}_9(476)$, un no vienādības $s^* = \hat{\alpha}_9(476)$ iegūstam $s = \alpha_9(476)$.

Līdzīgi turpinot, pakāpeniski iegūstam:

$$s = \alpha_9(476) = \alpha_9(256+220) = \hat{\alpha}_8(220);$$
$$s^* = \alpha_8(220) = \alpha_8(128+92) = \hat{\alpha}_7(92);$$
$$s = \alpha_7(92) = \alpha_7(64+28) = \hat{\alpha}_6(28);$$
$$s^* = \alpha_6(28) = \alpha_5(28) = \alpha_5(16+12) = \hat{\alpha}_4(12);$$
$$s = \alpha_4(12) = \alpha_4(8+4) = \hat{\alpha}_3(4);$$
$$s^* = \alpha_3(4) = \alpha_2(4) = \alpha_2(2+2) = \hat{\alpha}_1(2);$$
$$s = \alpha_1(2) = 1.$$

Tātad dotajā virknītē 2012. cipars būs 1.

Piezīme. Iesakām patstāvīgi padomāt, kā varētu ātrāk noskaidrot, vai $\alpha_n(k)=0$ vai $\alpha_n(k)=1$, ja doti skaitļi *n* un *k*.

10. Atbilde: pietiek ar vienu svēršanu.

Paņemsim no pirmā maisa 1 monētu, no otrā maisa – 2 monētas, no trešā maisa – 3 monētas, ..., no desmitā maisa – 10 monētas un nosvērsim visas šīs monētas kopā. Ja katra paņemtā monēta svērtu 10 gramus, tad svariem būtu jārāda $(1+2+3+4+5+6+7+8+9+10)\cdot 10 = 55\cdot 10 = 550$ g. Svari rādīs vairāk, jo vienā maisā katra monēta sver 11 g. Tātad tas gramu skaits, par kuru svaru rādījums pārsniedz skaitli 550, sakrīt ar maisa numuru, kurā ir smagākās monētas.