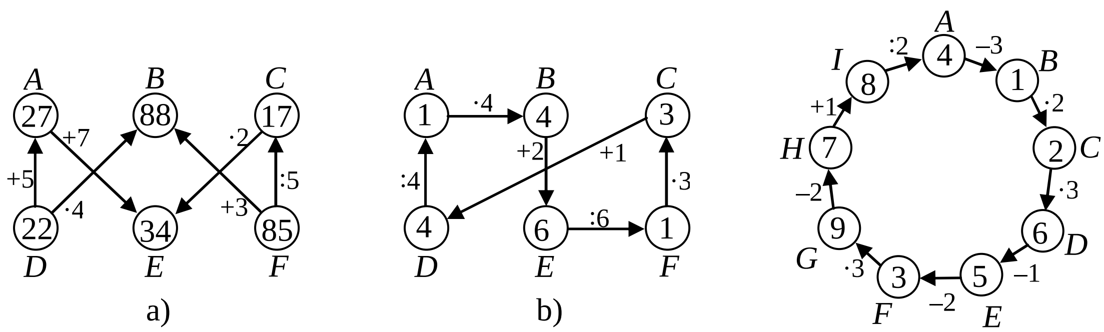
„Profesora Cipariņa kluba” 6. nodarbība 2011./2012. mācību gadā
Uzdevumu īsi atrisinājumi

1. Atbilde: Ja divciparu skaitlim galā pierakstīs to pašu skaitli, tad skaitlis palielināsies 101 reizi.
Pierādījums. Apzīmēsim divciparu skaitļa vienu ciparu ar a, bet desmitu ciparu – ar b. Tad šo skaitli varam pierakstīt $x=\overline{ab}=10a+b$. Šim skaitlim labajā pusē pierakstot šo pašu skaitli, iegūstam $\overline{abab}=1000a+100b+10a+b=100(10a+b)+10a+b=101(10a+b)$. Viegli redzēt, ka jauniegūtais skaitlis ir 101 reizi lielāks nekā sākotnējais skaitlis.

2. Atbildi skat. 1. zīm.



a) b) c)

1.zīm.

3. Ernesta monētu skaits ir par 3 lielāks nekā skaitļa 6 daudzkārtnis, un par 7 lielāks nekā skaitļa 8 daudzkārtnis. Mazākais veselais skaitlis, kas apmierina šos nosacījumus, ir 15.
Mazākais kopīgais skaitļu 6 un 8 dalāmais ir 24, tātad uzdevuma nosacījumi izpildīsies, ja Ernesta monētu kolekcijas apjoms pārsniegs 15 par skaitļa 24 daudzkārtni, t.i., tie var būt skaitļi 39, 63, 87 u.t.t. Tātad, ja Ernests sakārtos monētas kaudzītēs pa 24 monētām katrā, viņam paliks pāri 15 monētas.

4. Vienādībās attēloto sakarību vispārīgi var pierakstīt šādi:

$$\underbrace{111...11}_{2k\ cipari}-\underbrace{222...22}_{k\ cipari}=\left(\underbrace{333...33}_{k\ cipari}\right)^2. \qquad (*)$$

Sniegsim divus uzdevuma risinājumus.

1. risinājums. Ievērojam, ka $\underbrace{111...11}_{2k\ cipari}=\underbrace{999...99}_{2k\ cipari}:9=\left(10^{2k}-1\right):9$.

Līdzīgi arī $\underbrace{222...22}_{k\ cipari}=2\cdot\underbrace{111...11}_{k\ cipari}=2\cdot\left(10^k-1\right):9$ un

$$\underbrace{333...33}_{k\ cipari}=3\cdot\underbrace{111...11}_{k\ cipari}=3\cdot\left(10^k-1\right):9=\left(10^k-1\right):3.$$

Aplūkosim tagad atsevišķi vienādības (*) kreiso un labo pusi:

- Vienādības (*) labā puse: $\underbrace{111...11}_{2k\ cipari}-\underbrace{222...22}_{k\ cipari}=\dfrac{\left(10^{2k}-1\right)}{9}-\dfrac{2\cdot\left(10^k-1\right)}{9}=$

$$=\frac{10^{2k}-1-2\cdot10^k+2}{9}=$$

$$=\frac{10^{2k}-2\cdot10^k+1}{9}$$

- Vienādības (*) kreisā puse: $\left(\underbrace{333...33}_{k\ cipari}\right)^2=\left(\dfrac{10^k-1}{3}\right)^2=$

$$=\frac{10^{2k}-2\cdot 10^{k}+1}{9}$$

Tā kā vienādības (*) labās un kreisās puses izteiksmes ir vienādas, tātad arī dotā vienādība ir patiesa.

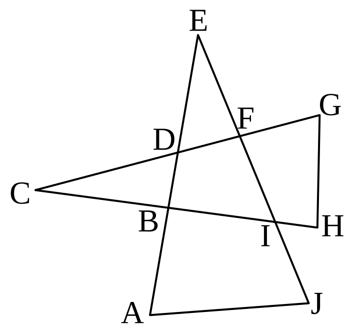
2. risinājums. Apzīmēsim $A=\underbrace{111...11}_{k\ cipari}$. Tad $\underbrace{222...22}_{k\ cipari}=2A$, $\underbrace{333...33}_{k\ cipari}=3A$ un $\underbrace{999...99}_{k\ cipari}=9A$.

Savukārt $\underbrace{111...11}_{2k\ cipari}=A\cdot\underbrace{100...01}_{k+1\ cipari}=A\left(10^{k}+1\right)$.

Tāpēc $\underbrace{111...11}_{2k\ cipari}-\underbrace{222...22}_{k\ cipari}=A\left(10^{k}+1\right)-2A=A\cdot 10^{k}+A-2A=A\left(10^{k}-1\right)=A\cdot\underbrace{999...99}_{k\ cipari}=$

$=A\cdot 9A=9A^{2}=\left(3A\right)^{2}=\left(\underbrace{333...33}_{k\ cipari}\right)^{2}$, kas arī bija jāpierāda.

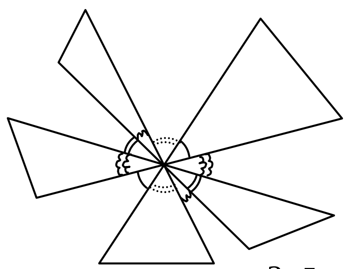
5. Tāds desmitstūris eksistē; 2. zīm. attēlots ieliekts desmitstūris *ABCDEFGHIJ*, kas pārklāt ar trijstūriem *AEJ* un *CGH*.



2.zīm.

Izliekta desmitstūra gadījumā uzdevumam atrisinājums neeksistē. Tiešām, izliekta desmitstūra iekšējo leņķu summa ir $180°\cdot 8$, bet viena trijstūra iekšējo leņķu summa ir $180°$. Tā kā izliektā desmitstūrī, pārklājot to ar trijstūriem uzdevumā norādītajā veidā, katrs iekšējais leņķis ir vairāku trijstūru iekšējo leņķu summa, tad desmitstūra pārklāšanai nepieciešami vismaz 8 trijstūri.

6. Doto piecu trijstūru visu piecpadsmit iekšējo leņķu summa ir $5\cdot 180°=900°$. Savukārt 3. zīmējumā redzams, ka katram no dotajā uzdevumā neiezīmētajiem trijstūru leņķiem ir pretī ar to vienādais krustleņķis. Tā kā centra leņķa lielums ir $360°$, tad doto piecu trijstūru sākotnējā zīmējumā neiezīmēto leņķu kopējā summa ir $360°:2=180°$. Tātad uzdevumā desmit iezīmēto leņķu summa ir $900°-180°=720°$.



3.zīm.

7. Doto dalīšanas piemēru varam pierakstīt arī kā reizinājumu (skat. 4. zīm.).

$$\begin{array}{cccc} & e & j & a \\ \cdot & & j & a \\ \hline & i & j & a \\ j & a & u & \\ \hline s & e & j & a \end{array}$$

4.zīm

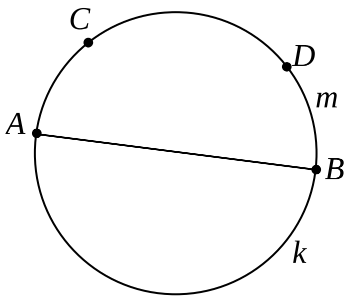
1) Apskatām reizinājumu $\overline{eja} \cdot a = \overline{ija}$. Acīmredzams, ka a nav 1. Tad a var būt 5 vai 6. Neatkarīgi no tā, vai a ir 5 vai 6, reizinājums ir trīsciparu skaitlis tikai tad, ja ***e* = 1**.
2) Tā kā $\overline{sej} = \overline{jau} + \overline{ij}$ un tātad $j + u = j$, tad skaidrs, ka ***u* = 0**. Ja tagad pieņemam, ka $a = 6$, tad $i + a = i + 6 = 11$ (jo iepriekš jau izspriedām, ka e = 1). Tātad i = 5. Bet tas nav iespējams, jo tādā gadījumā reizinājums $\overline{eja} \cdot a = \overline{1j6} \cdot 6$ nevar sākties ar ciparu i = 5, jo tas noteikti ir lielāks nekā $\overline{6**}$.
3) Tātad ***a* = 5**; no $i + a = i + 5 = 11$ iegūstam, ka ***i* = 6**.
4) Ciparam j jābūt pāra, jo $\overline{eja} \cdot j = \overline{jau}$, tātad reizinājuma $a \cdot j$ jeb $5 \cdot j$ pēdējais cipars ir u = 0. Turklāt j < 4, pretējā gadījumā $\overline{eja} \cdot a = 145 \cdot 5 = 724 = \overline{ija}$, kas ir pretrunā ar to, ka i = 6. Vienīgais vēl neizmantotais pāra cipars, kas ir mazāks nekā 4, ir 2; tātad ***j* = 2**.
5) Tā kā $\overline{jau} + \overline{ij} = \overline{sej}$ jeb $250 + 62 = 312$, tad ***s* = 3**.
Uzdevuma atbildi skat. 5. zīm.

$$\begin{array}{l} 3125 : 125 = 25 \\ \underline{-250} \\ \quad 625 \\ \quad \underline{-625} \\ \qquad 0 \end{array}$$

5.zīm.

8. Atbilde: $n = 4$.

Risinājums. Četrus punktus saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem izvietot var; kā piemērs der jebkura taisnstūra virsotņu kopa. Pierādīsim, ka vairāk nekā 4 punktus tā izvietot nevar.
Pieņemsim, ka n punkti izvietoti saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem. Apskatīsim visus nogriežņus, kam abi galapunkti atrodas divos no šiem n punktiem; pieņemsim, ka AB – garākais no šiem nogriežņiem (vai viens no nogriežņiem ar lielāko garumu, ja tādi ir vairāki).
Apzīmēsim ar C jebkuru citu no izvietotajiem n punktiem. Pēc uzdevuma nosacījumiem ΔACB ir taisnleņķa trijstūris. Saskaņā ar punktu A un B izvēli, $AB \geq AC$ un $AB \geq BC$; tātad AB ir trijstūra ABC garākā mala. Tā kā taisnleņķa trijstūrī taisnais leņķis ir tikai viens un tas ir lielākais leņķis, bet katrā trijstūrī pret lielāko leņķi atrodas garākā mala, tad $\angle ACB = 90°$.
Aplūkosim riņķa līniju ω ar diametru AB. No skolas kursa zināms, ka to punktu kopa, no kuriem nogriezni AB redz $90°$ leņķī, ir riņķa līnija ω bez punktiem A un B. Tātad visi n punkti pieder riņķa līnijai ω.
Pierādīsim, ka uz katra no lokiem AmB un AkB var atrasties ne vairāk kā viens no apskatāmajiem n punktiem, kas atšķiras no A un B. Pieņemsim pretējo, ka divi loka AmB punkti C un D pieder pie apskatāmās punktu kopas (skat. 6. zīm.). Tad pēc teorēmas par ievilkta leņķa mērīšanu $\angle ACD = \frac{1}{2} \cup AkD = \frac{1}{2}\left(\cup AkB + \cup BmD\right) = 90° + \frac{1}{2} \cup BmD > 90°$.
Tātad ΔACD nav taisnleņķa trijstūris, un tā ir pretruna ar uzdevuma nosacījumiem.
Tā kā $\cup AmB$ un $\cup AkB$ katrs satur ne vairāk kā 1 no dotās kopas punktiem (bez A un B), tad šī kopa nevar saturēt vairāk kā 4 punktus.



6.zīm.

9. Intuitīvi skaidrs, ka viens cilvēks (apzīmēsim to ar *X*) redz skaitli, kas uzrakstīts uz kuba augšējās skaldnes (apzīmēsim šo skaitli ar *a*) un skaitļus, kas uzrakstīti uz divām blakus esošām kuba sānu skaldnēm (apzīmēsim šos skaitļus ar *b* un *c*). Bet otrs cilvēks (apzīmēsim to ar *Y*) redz skaitli *a*, kas uzrakstīts uz kuba augšējās skaldnes, un skaitļus, kas uzrakstīti uz abām pārējām kuba sānu skaldnēm (apzīmēsim tos ar *d* un *e*). Pagaidām pieņemsim, ka šis fakts ir spēkā.

No uzdevuma nosacījumiem izriet, ka

$$a+b+c=15 \qquad (1)$$

$$a+d+e=7 \qquad (2)$$

Ievērosim, ka *a*, *b* un *c* vērtības var būt tikai 1; 2; 3; 4; 5; 6, pie tam *a*, *b* un *c* ir dažādi skaitļi. Tāpēc lielākā iespējamā $a+b+c$ vērtība ir $4+5+6=15$, un vienādība (1) izpildās **tikai** tādā gadījumā, ja *a*, *b* un *c* ir 4, 5 un 6 (pagaidām nav svarīgi, kurš skaitlis pieņem kādu no šīm vērtībām).

Kāda var būt *a* vērtība?

Ja $a=6$, tad no (2) izriet, ka $d+e=1$. Tas nav iespējams, jo $d\geq 1$ un $e\geq 1$.

Ja $a=5$, tad no (2) izriet, ka $d+e=2$. Tā kā $d\geq 1$ un $e\geq 1$, tad secinām, ka $d=1$ un $e=1$. Tas nav iespējams, jo *d* un *e* jābūt dažādiem.

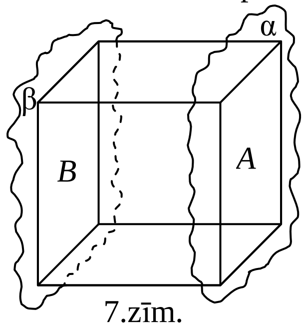
Tātad $a=4$. No (2) izriet, ka $d+e=3$, Tā kā $d\geq 1$, $e\geq 1$ un $d\neq e$, tad $d+e=3$ iespējams tikai tādā gadījumā, ja viens no skaitļiem *d* un *e* ir 1, bet otrs ir 2. Tātad *X* redz skaitļus 4; 5; 6, bet *Y* – skaitļus 4; 1; 2. Vienīgais skaitlis, ko neredz ne *X*, ne *Y* – skaitlis 3 – tātad uzrakstīts uz apakšējās skaldnes.

Lai pierādījums būtu precīzs, vēl jāpamato sākumā izteiktais apgalvojums par to, kādas skaldnes redz *X* un *Y*.

Vispirms pierādīsim palīgrezultātu.

Lemma. Cilvēks nevar vienlaicīgi redzēt abus skaitļus, kas uzrakstīti uz kauliņa pretējām skaldnēm.

Caur kuba divām pretējām skaldnēm *A* un *B* novilksim plaknes α un β (skat. 7. zīm.).



7.zīm.

Tā kā *A* un *B* ir paralēlas skaldnes, tad arī plaknes α un β ir paralēlas. Tātad tās nešķeļas. Lai cilvēks varētu redzēt skaitli uz skaldnes *B*, tam jāatrodas pa kreisi no β; lai varētu redzēt skaitli uz skaldnes *A*, jāatrodas pa labi no α. Tā kā α un β nešķeļas, tad nav tādu punktu, kas vienlaicīgi atrastos pa kreisi no β un pa labi no α. Lemma pierādīta.

Sadalām 4 kuba sānu skaldnes divos pāros tā, ka vienā pārī ietilpst pretējās skaldnes. No lemmas secinām, ka gan *X*, gan *Y* no katra pāra redz tikai vienu skaldni, tātad gan *X*, gan *Y* redz pa divām sānu skaldnēm, pie tam tām ir kopīga šķautne. Tā kā pēc dotā, ka gan *X*, gan *Y* redz pa trim skaldnēm, tad tie abi noteikti redz augšējo skaldni.

1. piezīme. Lemmas pierādījumā pieņemts, ka cilvēks ir „punkts", kas nevar vienlaicīgi atrasties pa kreisi no β un pa labi no α. Ja ievērojam, ka cilvēkam ir divas acis, no kurām viena varbūt atrodas pa kreisi no β, bet otra – pa labi no α (tas ir iespējams, ja attālums starp acīm ir lielāks nekā kuba šķautnes garums), tad minētais spriedums nav spēkā, un varbūt iespējami arī citi atrisinājumi. Iesakām lasītājam patstāvīgi analizēt šādu situāciju.

2. piezīme. Labojot iesūtītos darbus, profesors Cipariņš neuzskatīs par kļūdu, ja skolēns nebūs pierādījis, ka cilvēks nevar redzēt pretējās skaldnes.

10. Sanumurēsim akmeņus un apzīmēsim tos ar a_1, a_2, ..., a_{14}, a_{15}. Pārbaudām kaudzi $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$. Ja tajā radioaktīvu akmeņu nav, pārejam pie etapa Σ (skat. tālāk). Ja minētajā kaudzē ir radioaktīvi akmeņi, pārbaudām kaudzi $\{a_5, a_6, a_7, a_8, a_9\}$. Ja šajā kaudzē radioaktīvu akmeņu nav, tad abi radioaktīvie akmeņi ir starp desmit akmeņiem $a_1, a_2, a_3, a_4, a_{10}, a_{11}$, $a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{15}$; pārejam pie etapa Σ, ievērojot, ka starp a_1, a_2, a_3, a_4 ir vismaz viens radioaktīvs akmens. Ja starp a_5, a_6, a_7, a_8, a_9 ir radioaktīvi akmeņi, pārbaudām akmeni a_5 (trešā pārbaude). Ja a_5 nav radioaktīvs, tad pa vienam radioaktīvam akmenim ir kaudzēs $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ un $\{a_6, a_7, a_8, a_9\}$; katru no šiem akmeņiem var atrast ar divām pārbaudēm. Gadījumā, kad a_5 ir radioaktīvs, starp atlikušajiem 14 akmeņiem viegli atrast vienu radioaktīvo akmeni ar 4 pārbaudēm.

Etaps Σ. Aplūkosim, kā ar 6 pārbaudēm var atrast 2 radioaktīvus akmeņus starp 10 akmeņiem. Apzīmēsim šos desmit akmeņus ar b_1, b_2, ..., b_9, b_{10}.

Pārbaudām kaudzi $A = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ (šī pārbaude nav jāveic, ja zinām, ka starp a_1, a_2, a_3, a_4 (te $\{b_1, b_2, b_3, b_4\} = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$) ir vismaz viens radioaktīvs akmens). Ja tajā nav neviena radioaktīva akmens, tad atlikušās piecas pārbaudes izmantojam, lai noteiktu, kuri no atlikušajiem akmeņiem b_5, b_6, ..., b_{10} ir radioaktīvi (pārbaudām katru akmeni atsevišķi). Aplūkosim gadījumu, kad kaudzē *A* ir radioaktīvi akmeņi, un parādīsim, kā var pabeigt meklēšanu ar 5 pārbaudēm.

Vispirms pārbaudām kaudzi $B = \{b_4, b_5, b_6\}$. Ja tajā ir radioaktīvi akmeņi, tad otrajā pārbaudē apsekojam akmeņus b_5 un b_6. Ja starp tiem ir radioaktīvs akmens (noteikti tikai viens), tad ar vienu pārbaudi nosakām vienīgo radioaktīvo akmeni (b_5 vai b_6), bet ar divām pārbaudēm nosakām vienīgo radioaktīvo akmeni kaudzē *A*. Ja otrajā pārbaudē radioaktīvi akmeņi nav konstatēti, tad viens no radioaktīvajiem akmeņiem ir b_4, bet otrs atrodas kaudzē $\{b_1, b_2, b_3, b_7, b_8, b_9, b_{10}\}$ un to var noteikt ar trim pārbaudēm.

Ja pirmajā pārbaudē konstatēts, ka kaudzē *B* nav radioaktīvu akmeņu, tad abi radioaktīvie akmeņi ir kaudzē $\{b_1, b_2, b_3, b_7, b_8, b_9, b_{10}\}$, turklāt vismaz viens no tiem ir kaudzē $\{b_1, b_2, b_3\}$. Otrajā pārbaudē apsekojam b_3 un b_7. Ja neviens no tiem nav radioaktīvs, pārbaudām b_1. Ja b_1 nav radioaktīvs, tad viens radioaktīvais akmens ir b_2, bet otrs atrodas kaudzē $\{b_8, b_9, b_{10}\}$ un to var atrast ar divām pārbaudēm. Gadījumā, kad b_1 ir radioaktīvs, otrs radioaktīvais akmens ir kaudzē $\{b_2, b_8, b_9, b_{10}\}$ un to atkal var noteikt ar divām pārbaudēm.

Atliek aplūkot gadījumu, kad radioaktīvie akmeņi ir starp b_3 un b_7. Tad ar trešo pārbaudi pārbaudām kaudzi $\{b_1, b_2\}$. Ja tajā ir radioaktīvs akmens (noteikti tikai viens), tad ar divām atlikušajām pārbaudēm abus radioaktīvos akmeņus var noteikt – viens no tiem ir kaudzē $\{b_1, b_2\}$, bet otrs – kaudzē $\{b_3, b_7\}$. Ja turpretī kaudzē $\{b_1, b_2\}$ radioaktīvu akmeņu nav, tad viens no radioaktīvajiem akmeņiem ir b_3, bet otrs ir meklējams kaudzē $\{b_7, b_8, b_9, b_{10}\}$ un to var atrast ar divām pārbaudēm.