1. Atbilde: Kūka *Skudru pūznis* ir divas reizes dārgāka nekā kūka *Cielaviņa*.

Sniegsim divus risināšanas veidus.

1. risinājums. Apzīmēsim vienas kūkas *Skudru pūznis* cenu ar *P*, kūkas *Kristīne* cenu ar *K*, bet kūkas *Cielaviņa* cenu – ar *C*.

Apgalvojumu „trīs kūkas *Skudru pūznis* maksā tikpat, cik četras kūkas *Kristīne*” pierakstīsim: *PPP* = *KKKK*.

Apgalvojumu „divas kūkas *Skudru pūznis* maksā tikpat, cik viena *Cielaviņa* un divas *Kristīnes* kopā” pierakstīsim: *PP* = *CKK*.

Pirmās vienādības kreisajā pusē, atbilstoši otrās vienādības sakarībai, *PP* aizstāsim ar *CKK*, iegūstot sakarību *PCKK*=*KKKK*. Tā kā abām pusēm kopīgs ir *KK* (jeb abās pusēs divreiz pieskaitīta kūkas *Kristīne* cena), tad vienādības patiesums nemainīsies, ja šos *KK* no abām pusēm *atmetam*, iegūstot: *PC* = *KK*.

Līdzīgi vienādības patiesums nemainīsies, ja abām pusēm pieskaitīsim *C*; to izdarot, iegūstam vienādību *PCC* = *CKK*.

Atkal izmantosim otro uzdevumā doto sakarību un aizstāsim *CKK* ar *PP*, iegūstot *PCC* = *PP*. Ievērojam, ka abās vienādības pusēs ir kopīgs *P*, tāpēc, to *atmetot*, iegūstam *CC* = *P*, no kurienes secinām uzdevumā prasīto sakarību: viena kūka *Skudru pūznis* maksā tikpat, cik divas kūkas *Cielaviņa*.

2. risinājums. Uzdevumu var viegli atrisināt, tā nosacījumu pierakstot ar vienādojumu sistēmu:

$$\begin{cases} 3p = 4k \\ 2k + c = 2p \end{cases} \quad (1),$$

kur *p* – kūkas *Skudru pūznis* cena, *k* – kūkas *Kristīne* cena, *c* – kūkas *Cielaviņa* cena.

Pareizināsim pirmā vienādojuma abas puses ar skaitli 2, bet otrā vienādojuma abas puses – ar 3, tādējādi iegūstot

$$\begin{cases} 6p = 8k \\ 6k + 3c = 6p \end{cases}.$$

Atbilstoši sistēmas pirmajam vienādojumam, otrā vienādojuma labajā pusē esošo $6p$ aizstājam ar $8k$, iegūstot sakarību $6k + 3c = 8k$. No vienādības abām pusēm atņemot $6k$ (jeb *pārnesot* $6k$ uz vienādības labo pusi), iegūstam, ka $3c = 2k$.

Vienādojumam abām pusēm pieskaitām c:

$$3c + c = 2k + c \text{ un}$$
$$4c = 2k + c$$

Ievērojam, ka vienādojumu sistēmā (1) no otrā vienādojuma var secināt, ka $2k + c$ vienāds ar $2p$, tāpēc jau iegūtā sakarība *pārvēršas* par $4c = 2p$. Vienādības abas puses izdalot ar vienu un to pašu skaitli 2, iegūstam, ka $2c = p$, no kurienes arī iegūstam uzdevuma atbildi: kūka *Skudru pūznis* ir divas reizes dārgāka nekā kūka *Cielaviņa*.

2. Lai skaitlis dalītos ar 15, tam jādalās gan ar skaitli 3, gan ar 5. Turklāt, ja skaitlis dalās ar 5, tad pēdējais tā cipars ir 0 vai 5. Meklētā palindroma pēdējais cipars nevar būt 0, jo tad arī tā pirmajam ciparam būtu jābūt 0, kas būtu pretrunā ar nosacījumu, ka jāmeklē sešciparu palindroms.

Tātad mums jāmeklē lielākais sešciparu palindroms, kura pirmais un pēdējais cipars ir 5 un kurš dalās ar 3. Lielākais šāds sešciparu skaitlis var tikt uzrakstīts formā 59*aa*95, kur *a* – cipars.

Atcerēsimies naturāla skaitļa pazīmi dalīšanai ar 3: naturāls skaitlis dalās ar skaitli 3 tad un tikai tad, ja tā ciparu summa dalās ar 3. Iegūtā skaitļa ciparu summa ir

$5+9+a+a+9+5=18+10+2a=18+2(5+a)$. Tā kā 18 jau dalās ar 3, tad, lai summa $18+2(5+a)$ dalītos ar 3, arī $2(5+a)$ jādalās ar 3. Šis reizinājums dalās ar 3 tad, ja iekavās esošā izteiksme dalās ar 3. No visiem cipariem kā a vērtība der skaitļi 1; 4 un 7. Tā kā mums jānosaka lielākais sešciparu skaitlis, tad $a=7$. Tātad uzdevumā prasītais skaitlis ir **597795**.

3. Katrs pārgājiena dalībnieks izēd pusi no zupas iepakojuma, trešdaļu no salātu iepakojuma un ceturto daļu no šokolādes krēma porcijas. Tātad katrs pārgājiena dalībnieks ir izēdis $\frac{1}{2}^{(\cdot 6}+\frac{1}{3}^{(\cdot 4}+\frac{1}{4}^{(\cdot 3}=\frac{13}{12}$ no visiem pārtikas iepakojumiem. Tad pavisam kopā ir izēsti $\frac{13}{12}\cdot n$ pārtikas iepakojumi, kur n – kopīgais pārgājiena dalībnieku skaits.

Tā kā dots, ka kopējais izlietoto iepakojumu skaits ir 156, varam izveidot vienādojumu:

$$\frac{13}{12}n=156,$$

no kurienes $n=\frac{12}{13}\cdot 156=144$.

Tātad pārgājienā piedalījās **144** dalībnieki.

4. Atbilde: Taisnība ir Dacei; vienādojumam ir divi atrisinājumi: $a=12$, $b=2$ un $a=144$, $b=4$.

Atrisinājums.

Ievērojam, ka vienādojuma labā puse $9b^2$ ar jebkurām naturāla skaitļa b vērtībām vienmēr būs naturāls skaitlis (naturālu skaitli kāpinot kvadrātā, iegūst naturālu skaitli).

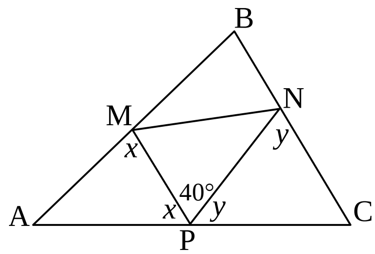
Tātad arī vienādojuma kreisās puses vērtībai ir jābūt naturālam skaitlim. Sadalām to reizinātājos, iegūstot $5a-ab=a(5-b)$. Tā kā reizinātājs a ir naturāls skaitlis, tad arī iekavās esošajai starpībai jābūt naturālam skaitlim. Tas iespējams tad, ja skaitļa b vērtība nepārsniedz 4 (jeb $b\le 4$). Tāpēc iespējamas četras skaitļa b vērtības: 1; 2; 3 un 4. Apskatīsim katru no tām atsevišķi:

- Ja $b=1$, tad iegūstam vienādojumu $(5-1)a=9\cdot 1^2$, tātad $4a=9$. Redzam, ka šim vienādojumam nav atrisinājumu veselos skaitļos a.
- Ja $b=2$, tad iegūstam vienādojumu $(5-2)a=9\cdot 2^2$, tātad $3a=36$ un $a=12$. Iegūstam vienu no atrisinājumiem: ***a* = 12**, ***b* = 2**.
- $b=3$, tad iegūstam vienādojumu $(5-3)a=9\cdot 3^2$, tātad $2a=81$. Redzam, ka arī šim vienādojumam nav atrisinājumu veselos skaitļos a.
- $b=4$, tad iegūstam vienādojumu $(5-4)a=9\cdot 4^2$, tātad $a=144$. Iegūstam otru atrisinājumu: ***a* = 144**, ***b* = 4**.

Jau iepriekš pierādījām, ka apskatītās b vērtības ir vienīgās iespējamās, tātad iegūtās ir vienīgās uzdevuma atbildes.

5. Apzīmējam leņķa $\angle AMP$ lielumu ar x (skat. 1. zīm.). Tā kā dots, ka $AM = AP$, un trijstūrī pretī vienādām malām atrodas vienādi leņķi, tad $\angle APM=\angle AMP=x$.

Līdzīgi apzīmējot $\angle CNP=y$, no malu NC un CP vienādības izriet, ka $\angle CPN=\angle CNP=y$.



1.zīm.

Tā kā punkti A, P un C atrodas uz vienas taisnes, tad $\angle APC = 180°$; tāpēc $x + y + 40° = 180°$, no kurienes $x + y = 140°$.

Izmantosim to, ka katram trijstūrim visu trīs leņķu summa ir 180°. Tāpēc varam izteikt $\angle BAC$ un $\angle ACB$ lielumu: $\angle BAC = 180° - 2x$ un $\angle ACB = 180° - 2y$.

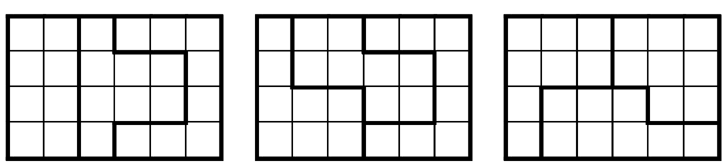
Savukārt $\angle ABC = 180° - \angle BAC - \angle BCA$. Ievietojot vienādībā izteiktos $\angle BAC$ un $\angle ACB$ lielumus, iegūstam:

$$\begin{aligned}\angle MBN = \angle ABC &= 180° - (180° - 2x) - (180° - 2y) = \\ &= 180° - 180° + 2x - 180° + 2y = \\ &= 2x + 2y - 180° = \\ &= 2(x + y) - 180°\end{aligned}$$

Ievietojam iekavās iepriekš izteikto x un y summas vērtību, iegūstot

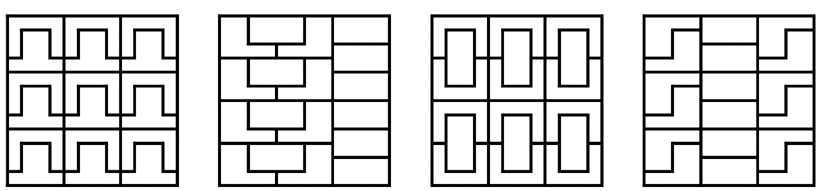
$$\begin{aligned}\angle ABC &= 2 \cdot 140° - 180° = \\ &= 280° - 180° = \\ &= \mathbf{100°}\end{aligned}$$

6. a) Tā kā katra dotā puzles gabaliņa laukums ir 8 rūtiņas, tad trīs gabaliņu veidotā taisnstūra laukumam jābūt $3 \cdot 8 = 24$ rūtiņas. Iespējamie taisnstūra malu garumi var būt 1×24, 2×12, 3×8, 4×6 rūtiņas.
Noteikti nevar salikt taisnstūri ar izmēriem 1×24, jo visu puzles gabaliņu garums un platums ir lielāki nekā 1 rūtiņa; arī taisnstūri ar izmēriem 2×12 salikt nevar, jo tikai divu figūriņu platums ir divas rūtiņas, bet nepieciešams izmantot trīs figūriņas. Patstāvīgi var pārliecināties, ka arī taisnstūri ar izmēriem 3×8 salikt nevar.
Trīs piemērus, kā var salikt taisnstūri ar izmēriem 4×6 rūtiņas, skat., 2. zīm.


(2), (3), (1) (5), (8), (1) (5), (4), (7)

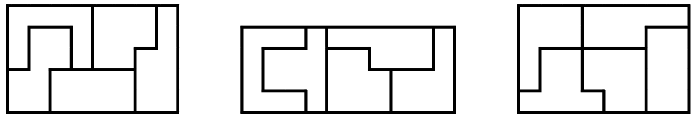
2.zīm.

b) Vairākus piemērus, kā prasīto var izdarīt, skat., 3. zīm.


(1) & (3) (2) & (5) (1) & (2) (2) & (5)

3.zīm.

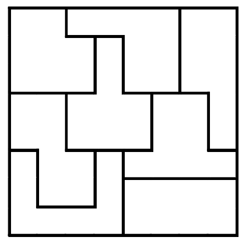
c) Vairākus piemērus, kā prasīto var izdarīt, skat., 4. zīm.



(1), (2), (4), (7), (8) | (1), (3), (4), (5), (7) | (2), (3), (4), (5), (7)

4.zīm.

Atbildi **patstāvīgajam treniņam** dotajam uzdevumam skat. 5. zīm.



5.zīm.

7. a) Izmantojot uzdevumā doto darbības ∇ definīciju, aprēķinām $2\nabla 5=\frac{2+5}{1+2\cdot 5}=\frac{7}{11}$.

b) Ievērojot darbību secību, vispirms aprēķinām iekavās esošās izteiksmes vērtību:

$$(1\nabla 2)\nabla 3=\left(\frac{1+2}{1+1\cdot 2}\right)\nabla 3=\left(\frac{3}{3}\right)\nabla 3=1\nabla 3=\frac{1+3}{1+1\cdot 3}=1.$$

Piezīme. Var pierādīt, ka katram nenegatīvam skaitlim *b*, izteiksmes $1\nabla b$ vērtība ir vienāda ar 1. Patiešām, $1\nabla b=\frac{1+b}{1+1\cdot b}=\frac{1+b}{1+b}=1$.

c) Izsakām $2\nabla x$, izmantojot doto darbības definīciju:

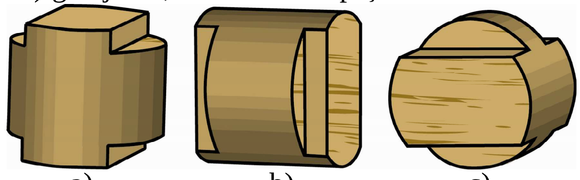
$$2\nabla x=\frac{2+x}{1+2x}.$$

Tātad $\frac{2+x}{1+2x}=\frac{5}{7}$.

Tā kā algebriskās daļas saucēja $1+2x$ vērtība visiem pieļaujamajiem x nav 0 (darbība ∇ definēta tikai nenegatīviem skaitļiem), tad, vienādojot abu vienādojuma pušu saucējus, iegūstam $7(2+x)=5(1+2x)$, no kurienes tālāk $14+7x=5+10x$ un $9=3x$, tātad $\boldsymbol{x}$ **= 3**.

8. Viens piemērs, kā var izskatīties korķis, ar kuru var aiztaisīt visus trīs uzdevumā dotos caurumus, parādīts 6. zīm.; attēlā korķis redzams no trim pusēm.

Pagriežot korķi, kā parādīts a) gadījumā, var aiztaisīt *krustveida* caurumu; pagriežot korķi, kā parādīts b) gadījumā, var aiztaisīt taisnstūra veida caurumu; pagriežot korķi, kā parādīts c) gadījumā, var aiztaisīt apaļo caurumu.



a) b) c)

6.zīm.

9. Uzdevumā prasīto var izdarīt diezgan vienkārši – vispirms visi draugi automašīnā ieliek veļas mašīnu, un divi draugi kopā ar veļas mašīnu aizbrauc līdz dzīvoklim. Tur viens no viņiem izkāpj, bet otrs – aizbrauc pakaļ trešajam draugam. Kad arī viņi ir aizbraukuši uz dzīvokli, visi trīs draugi izceļ veļas mašīnu un nogādā to dzīvoklī.

10. Viens no uzdevuma atrisinājumiem ir šāds (tabulas augšā norādīts trauku tilpums, zemāk – sākotnējais piena daudzums, bet katrā nākamajā rindā – piena daudzums katrā traukā pēc katras darbības):

80 *l*	80 *l*	5 *l*	4 *l*
80	80	0	0
75	80	5	0
75	80	1	4
79	80	1	0
74	80	0	1
74	80	5	1
74	80	2	4
78	80	2	0
78	76	2	4
80	76	2	2

Tātad no vienas kannas piepilda 5 *l* krūzi, tad no tās pārlej pienu 4 *l* krūzē. Pēc tam 4 *l* krūzes saturu ielej atpakaļ kannā u.t.t. Tas viss ir viegli izdarāms. Pievērsiet uzmanību divām pēdējām asprātīgajām operācijām: 4 *l* krūzi pielej no otras kannas, pēc tam līdz augšai piepilda pirmo kannu.