„Profesora Cipariņa kluba” 2012./2013. mācību gada
2. nodarbības uzdevumu īsi atrisinājumi

1. Atbilde: Sprīdītis nevarēs izpildīt Skopuļa prasību.

Risinājums. Dotā skaitļa ciparu summa ir 5. Zināms, ka 5 nedalās ar 3. Tātad arī dotais skaitlis nedalās ar 3.

Triju pēc kārtas ņemtu veselu skaitļu summa S dalās ar 3:

$$S = n + (n+1) + (n+2) = 3n + 3 = 3(n+1).$$

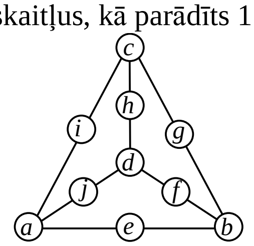
Arī triju pēc kārtas ņemtu veselu skaitļu reizinājums $R = n(n+1)(n+2)$ dalās ar 3. Pierādīsim to. Apskatīsim skaitļa n iespējamos atlikumus, dalot ar 3:

- Ja n dalās ar 3, tad ar 3 dalās arī reizinājums R.
- Ja n, dalot ar 3, dod atlikumu 1, tad $n + 2$ dalās ar 3 un tāpēc arī R dalās ar 3.
- Ja n, dalot ar 3, dod atlikumu 2, tad $n + 1$ dalās ar 3 un arī R dalās ar 3.

Tā kā n vai nu dalās ar 3 bez atlikuma, vai arī dod atlikumā 1 vai 2, tad esam apskatījuši visus iespējamos gadījumus.

Tātad gan S, gan R dalās ar 3. Tāpēc varam izteikt $S = 3 \cdot k$ un $R = 3 \cdot m$, kur k un m – veseli skaitļi. Tad starpība $S - R = 3k - 3m = 3(k - m)$ arī dalās ar 3. Tā kā dotais skaitlis nedalās ar 3, bet meklējamo skaitļu starpība noteikti dalās ar 3, tad Skopuļa prasību izpildīt nevar.

2. Apzīmēsim ar S uz katras taisnes esošo trīs skaitļu summu, un ar burtiem no a līdz j apzīmēsim aplīšos ierakstītos skaitļus, kā parādīts 1. zīm.



1.zīm.

Ievērojam, ka skaitļi a, b, c, d sastopami pavisam uz trīs taisnēm, bet visi pārējie – katrs tieši uz vienas taisnes. Tāpēc, saskaitot uz visām sešām taisnēm uzrakstīto skaitļu summas, iegūstam

$$3(a+b+c+d) + (e+f+g+h+i+j) = 6S \text{ jeb}$$

$$2(a+b+c+d) + (a+b+c+d) + (e+f+g+h+i+j) = 6S. \qquad (1)$$

Visu desmit skaitļu no 1 līdz 10 summa ir 55, t.i.,

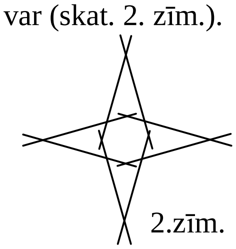
$$(a+b+c+d) + (e+f+g+h+i+j) = 55.$$

Tad vienādību (1) varam pārrakstīt

$$2(a+b+c+d) + 55 = 6S.$$

Ievērojam, ka skaitlis 55 ir nepāra skaitlis, bet $2(a+b+c+d)$ un $6S$ – pāra skaitļi. Esam ieguvuši pretrunu, tāpēc uzdevumā prasīto izdarīt nav iespējams.

3. Astoņus nogriežņus tā uzzīmēt var (skat. 2. zīm.).



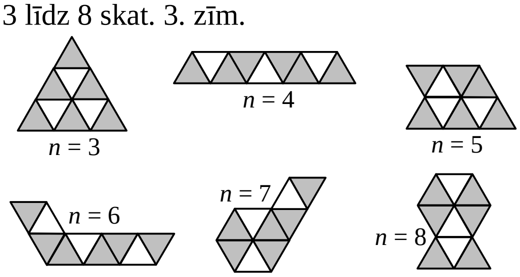
2.zīm.

Septiņus nogriežņus tā uzzīmēt nevar, pat ja to garumi būtu dažādi. Taču pieņemsim, ka to var izdarīt. Tā kā, pēc noteikumiem, katram nogrieznim jākrusto 3 citi, varam saskaitīt to veidotos krustošanās punktus: 3 krustpunktu veidošanā piedalās 1. nogrieznis, 3 krustpunktu – 2. nogrieznis, ..., 3 krustpunktu – 7. nogrieznis; pavisam iegūstam 21 krustošanās punktu. Taču katru divu nogriežņu a un b

krustošanās te ieskaitīta divas reizes: krustošanās, kurās piedalās nogrieznis *a*, un krustošanās, kurās piedalās nogrieznis *b*. Tātad rezultātā būtu jāiegūst pāra skaitli, taču ieguvām nepāra skaitli. Šī pretruna rāda, ka sākotnējais pieņēmums bijis nepareizs un 7 nogriežņus prasītajā veidā uzzīmēt nevar.

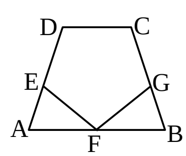
4. Kad Didzis bija veicis $\frac{1}{6}$ jeb $\frac{4}{24}$ visas distances, Raivis jau bija veicis $\left(1-\frac{1}{6}\right)-\frac{1}{8}=\frac{5}{6}-\frac{1}{8}=\frac{17}{24}$ visas distances. Tātad Raivja ātrums ir $\frac{17}{4}$ reizes lielāks nekā Didža ātrums. Didzim vēl bija jāskrien $\frac{5}{6}$ visas distances, bet viņa sāncensim – tikai $\frac{1}{6}$ distances. Tātad, lai Didzis varētu finišēt vienlaikus ar Raivi, viņam jāskrien ar ātrumu, kas 5 reizes lielāks nekā Raivja ātrums, t.i., 5 reizes lielāku nekā $\frac{17}{4}$ no Didža sākotnējā ātruma. Tātad Didzim jāskrien $\frac{85}{4}$ reizes ātrāk nekā sākumā.

5. Visām trim trapecēm kopā ir 12 virsotnes. Savienojot divas trapeces kopā, iegūtās figūras virsotņu skaits samazinās vismaz par 2. Tāpēc lielākā iespējamā *n* vērtība ir $12-2\cdot 2=8$. Tā kā iegūtajai figūrai jābūt daudzstūrim, tad *n* ir vismaz 3. Piemērus katrai *n* vērtībai no 3 līdz 8 skat. 3. zīm.



3.zīm.

6. Izliekta piecstūra visu leņķu summa ir $180°\cdot(n-2)=180°\cdot(5-2)=540°$. Ja piecstūrim *CDEFG* (skat. 4. zīm.) visi leņķi ir vienādi, tad katrs leņķis ir $540°:5=108°$ liels.



4.zīm.

Pierādīsim, ka ΔAEF ir vienādsānu. Patiešām, $\angle AEF=72°$, jo tas ir piecstūra ārējais leņķis. Tā kā $AB \parallel DC$, un $\angle EAF$ ar $\angle EDC$ ir iekšējie šķērsleņķi, tad $\angle EAF=180°-108°=72°$. Trijstūrī pretī vienādiem leņķiem atrodas vienādas malas, tāpēc $AF=EF$. Tātad ΔAEF ir vienādsānu.
Līdzīgi iegūstam, ka arī ΔBGF ir vienādsānu un tāpēc $BF=GF$.
Bet tad $AB=AF+FB=EF+FG=DC+DC=2\cdot DC$ (jo regulāra piecstūra visas malas ir vienāda garuma). Tāpēc $DC=\frac{1}{2}\cdot AB=\mathbf{30\ cm}$.

7. Skaitlis dalās ar 8 un 9. Tātad tā ciparu summai jādalās ar 9. Ciparu summa ir $4+2+4+a+b=10+a+b$. Tātad vai nu $a+b=8$, vai arī $a+b=17$ (jo $0 \le a \le 9$ un $0 \le b \le 9$).
Aplūkojam gadījumu, kad $a+b=8$. Ievērojam, ka triju pēdējo ciparu veidotajam skaitlim jādalās ar 8 (jo $42a4b = 42000 + a4b$, un gan $42a4b$, gan 42000 dalās ar 8). Pārbaudot iespējas $a=0,1,...,8$, iegūstam 2 atbildes: 1) $a=0$, $b=8$; 2) $a=8$, $b=0$.
Ja $a+b=17$, tad vai nu $a=9$ un $b=8$, vai arī $a=8$ un $b=9$. Pārbaudot redzam, ka neviena no šīm iespējām neder.

8. Apzīmēsim taisnstūra malu garumus ar *x* un *y*. Tad vienīgais nosacījums, kas dots uzdevumā, ir $2x+2y=xy$; bez tam x un y jābūt veseliem skaitļiem. Šos nosacījumus apmierina, piemēram, vērtības $x=4$, $y=4$, kā arī $x=3$, $y=6$.
Tā kā mums nav nekādu noteikumu, kas dotu iespēju izvēlēties kādu no šīm divām atbildēm (bez tam pastāv iespēja, ka ir arī citas *x* un *y* vērtības, kas apmierina uzdevuma nosacījumu), tad taisnstūra izmērus noteikt nevar.
Noskaidrosim visus iespējamos šādas istabas grīdas izmērus.
Vienādojumu $2x+2y=xy$ var izteikt formā $x(y-2)=2y$. Tā kā $x>0$ un $y>0$, tad arī $y-2>0$; un $x=\frac{2y}{y-2}$. Acīmredzot taisnstūra izmēri var būt jebkuri skaitļi *x* un *y*, kur $y>2$ un $x=\frac{2y}{y-2}$.
Parādīsim, kā atrast visus vienādojuma atrisinājumus **naturālos skaitļos**. Vienādojumu var pārrakstīt arī formā $(x-2)(y-2)=4$. Skaitli 4 var sadalīt 2 naturālu skaitļu reizinājumā tikai 3 veidos: 4 · 1, 2 · 2, 1 · 4. Attiecīgi iegūstam šādas iespējas:

$x-2=4$	$x-2=2$	$x-2=1$
$y-2=1$	$y-2=2$	$y-2=4$

Rezultātā ir 3 atrisinājumi: $x=6$ un $y=3$; $x=4$ un $y=4$; $x=3$ un $y=6$.

9. a) No nosacījumiem (3) un (5) secinām, ka Kristīne sēž kopā ar Lindu. Bet tad no nosacījuma (1) izriet, ka Patrīcijai jāsēž kopā ar Sandru. Tāpēc no nosacījuma (4) secinām, ka Renāte sēdēs kopā ar Annu. Tad atliek, ka Justīnei jāsēž kopā ar Nikolu.
b) Atbilstoši nosacījumam (4), Renāte un Nikola nesēž pie viena sola; tātad Renāte sēž sola vidū un pa labi no viņas – Sandra (6. nosac.). Iegūstam šādu izkārtojumu pie viena no soliem:

	Renāte	*Sandra*

Tā kā Justīne grib sēdēt blakus vai nu Nikolai, vai Annai (1. nosac.), tad viņa noteikti nesēž pie šī paša galda. Savukārt no 2. nosacījuma izriet, ka arī Kristīne sēž pie otra sola. Tātad Justīnei jāsēž blakus gan Kristīnei, gan arī Nikolai vai Annai, tāpēc viņa sēž otra sola vidējā vietā. Tātad šobrīd izkārtojums pie otra sola ir šāds:

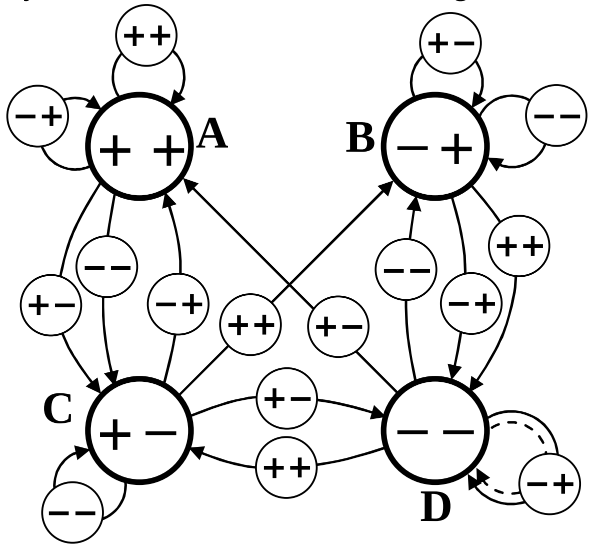
	Justīne	*Kristīne*

Tā kā Renāte nevēlas sēdēt blakus Nikolai (4. nosac.), tad viņa sēž pie otrā sola (tiek ievērots arī 1. nosacījums), bet tad Anna sēž pirmā sola kreisajā malā (tādējādi tiek apmierināts arī 3. un 5. nosac.).
Esam ieguvuši šādu izkārtojumu pie galdiem (viegli pārbaudīt, ka visi nosacījumi tiek ievēroti):

Anna	*Renāte*	*Sandra*

Nikola	*Justīne*	*Kristīne*

10. Uzdevuma nosacījumus var attēlot ar 5. zīm. doto diagrammu.



5.zīm.

Ar tumšākajām līnijām apvilktie aplīši norāda uz spoku uzvedību: aplītī ierakstītā pirmā zīme rāda, vai dziedošais spoks dzied vai klusē, bet otrā – kā izturas smejošais spoks. Tā, piemēram, aplītis A atbilst stāvoklim, kad abi spoki ir trokšņaini. Skaidrs, ka pavisam iespējami 4 stāvokļi.

Atkarībā no darbībām ar ērģelēm un sveci, spoku izturēšanās mainās. Šīs izmaiņas diagrammā atspoguļojas ar bultiņām. Bultiņu vidū esošajās aplīšos ierakstītās zīmes rāda, kādām darbībām ar ērģelēm un sveci atbilst šī bultiņa: pirmā zīme rāda, vai ērģeles skan vai nē, otrā zīme – svece deg vai nē. Tā, piemēram, bultiņa, kas iet no C uz A, rāda, ka gadījumā, ja kādas minūtes laikā dziedošais spoks dziedājis, bet smejošais spoks klusējis un ērģeles nav skanējušas, bet svece degusi, tad nākošās minūtes laikā abi spoki atkal trokšņos.

Diagramma izveidota, pamatojoties uz uzdevuma noteikumos doto informāciju par spoku izturēšanos: parādīts, kādas izmaiņas notiek katrā stāvoklī, kas atbilst vienam no 4 iespējamiem spoku izturēšanās veidiem, ja veic jebkuru no 4 iespējamām darbībām ar sveci un ērģelēm. No katra stāvokļa A, B, C, D, kas atbilst vienam no iespējamiem spoku izturēšanās veidiem, jāiziet 4 bultiņām (bultiņas, kas iziet no viena stāvokļa un nonāk vienā citā stāvoklī, var arī apvienot, bultiņas vidū esošajā aplītī ierakstot abas ērģeļu un sveces stāvokļu kombinācijas, kurām tās atbilst).

Pēc uzdevuma noteikumiem, pašreizējais stāvoklis atbilst aplītim A, bet pa diagrammas bultiņām mums jānonāk un jāpaliek aplītī D. Acīmredzot to var panākt, ejot, piemēram, no A uz C, no C uz D un pēc tam visu laiku pārejot no D uz D pa bultiņu, kas uzzīmēta ar pārtrauktu līniju. Atceroties, ko norāda zīmes aplīšos bultiņu vidū, redzam, ka to var panākt, piemēram, ar šādām darbībām: pašreizējās minūtes laikā nedara neko (bultiņa, kas iziet no A un atbilst „**– –**”, novedīs aplītī C), pēc tam vienu minūti jāskan ērģelēm, nedegot svecei (bultiņa, kas iziet no C un atbilst „**+ –**”, noved aplītī D), bet pēc tam ērģelēm jāapklust un jāiedegas svecei (bultiņa, kas iziet no D un atbilst „**– +**”, visu laiku atgriežas D).